Chapitre4

Résolution des équations différentielle ordinaire

4.1 Introduction :

Les équations différentielles sont utilisées dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Une équation différentielle ordinaire (ODE, *Ordinary Differential Equation*) est une équation reliant une fonction d'une variable réelle et ses dérivées, c'est à dire de la forme suivante :

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dt} = f\big(t, y(t)\big)}$$

où y est la fonction inconnue, y' sa dérivée et t la variable réelle.

Il existe deux types de problèmes différentiels :

- Conditions initiales (ou problème de **Cauchy)**

données pour une seule valeur t_0 de t, par exemple $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots\dots\dots., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$

- Conditions **aux limites** (Problème **aux limites)**

données pour des valeurs distinctes de la variable indépendante t (par exemple les deux conditions sont alors partagées entre les deux extrémités de l'intervalle: $y(0)=y_0$ et $y(T) = y_T$). Ce deuxième type de problème correspond à des situations physiques complètement différentes et cela se traduit par des méthodes de résolution numériques complètement différentes.

4.2 Le problème de Cauchy :

Soit f une fonction définie de $[t_0, T] \subset R \rightarrow R$. Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction y : $[t_0, T] \rightarrow R$ solution de l'équation différentielle suivante :

$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), t \in [t_0, T]$ avec $y(t_0) = y_0$

La condition $y(t_0) = y_0$ est une condition initiale ou la condition de Cauchy. Si on suppose que la fonction f est continue par rapport aux deux variables t, y et que f est uniformément Lipchitzienne par rapport à y c'est à dire que

$\exists \boldsymbol{L} > 0, \forall t \in [\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{T}], \forall \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in \boldsymbol{R}, |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y_2})| \leq \boldsymbol{L}|\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2}|$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique y ∈ $C^1([t_0, T])$

Le problème de Cauchy est un problème d'évolution, c'est à dire à partir de la condition initiale, on peut calculer la solution à l'instant t.

Schéma à un pas (méthode à un pas)

Si y_{n+1} est une fonction de t_n et y_n uniquement. Le schéma d' Euler est un schéma à un pas.

Un **Schéma à deux pas** si y_{n+1}est une fonction de (t_n , y_n) et de (t_{n-1}, y_{n-1}) uniquement.

Un **Schéma à k pas** si y_{n+1}est une fonction de (t_n , y_n), (t_{n-1}, y_{n-1})............

($t_{n\text{-(k-1)}}$, $y_{n-(k-1)}$).

Dans les méthodes à un pas, le calcul de y_{n+1}fait intervenir t_n, y_n, h que l'on peut écrire sous la forme:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, t_n, h) \qquad (4\ .1)$$

$$\Phi(y_n, t_n, h) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \, k_i$$

tel que

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + ah, y_n + bk_1)$$

$$k_3 = hf(t_n + bh, y_n + ck_2)$$

.

.

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + R_1 k_1 + R_2 k_2 + \cdots \ldots \ldots}$$

La méthode la plus célèbre est celle d'Euler.

4.3 Méthode d'Euler :

Dans cette méthode la fonction $\Phi(y_n, t_n, h)$ dans la relation (4.1)
est en fonction de t et y ($\Phi(y_n, t_n, h) = f(t, y)$) .
On donne une subdivision de I = [t_0, T] en n intervalles de pas h.
Tel que $h = t_{n+1}$ - t_n .On notera par y_n une approximation de $y(t_n)$:
Dans le problème de Cauchy, pour t = t_n on a

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

On approche la dérivée $y'(t_n)$ en utilisant des schémas de dérivation numérique.

4.3.1 Schéma d'Euler:

La méthode d'Euler consiste à approcher $y'(t_n)$ par la formule de Taylor comme suit :

$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + E(\mathrm{h}^2)$

Soit $y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} + E(\mathrm{h}^2) = f(t_n, y(t_n))$

avec $E(\mathrm{h}^2)$ est le reste (considéré négligeable)

et y_n une approximation de $y(t_n)$ ($y_n \approx y(t_n)$), le schéma d'Euler s'écrit

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{y(t_0) = y_0}.$$

Exemple

Soit l équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \mathrm{y}' = \mathrm{y} \\ \mathrm{y}(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte (la solution analytique) de cette équation est donnée par

$$\mathrm{y}_{\text{exacte}} = e^t$$

t	y pour h=0.2	y pour h=0.1	y exacte
1	2.4883	2.59374	2.71828
2	6.19174	6.7275	7.38905
3	15.407	17.4494	20.0555
4	38.3376	45.2593	54.598

4.3.2 Interprétation géométrique :

Le point (t_{n+1}, y_{n+1}) est sur la droite contenant (t_n, y_n) et de pente

$f\ (t_n,\ y_n)$,ou $f\ (t_n,\ y_n)$ est la pente de la tangente à la courbe. Alors le sens géométrique de la relation d'Euler est donc d'approximer la courbe de $y(t)$ par sa tangente en $(t_n,\ y_n)$.

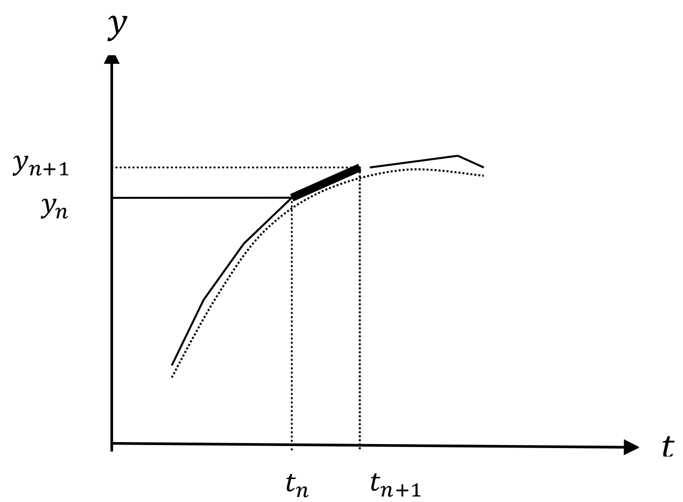

Fig 4.1 Représentation graphique de la méthode d'Euler.

Remarque :

La méthode d'Euler converge très lentement, l'erreur est mal contrôlée. On cherche donc des algorithmes plus efficaces.

4.4 Méthode d'Euler améliorée (méthode de Heun) ou encore méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est une autre méthode d'ordre 2. Où on peut améliorer les résultats obtenus avec la méthode d'Euler par la formule suivante :

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y^*_{n+1}\right)}$$

$$\boldsymbol{y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)}$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en (t_n, y_n) par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

Exemple :

Résoudre le problème de Cauchy précédant par la méthode d'Euler améliorée en prenant un pas d'intégration h=0.2.

On a :

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y^*_{n+1}\right)}$$

$$\boldsymbol{y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)}$$

Par remplacement dans la formule

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)}$$

Avec :$f(t, y) = y' = y$ et $y(0) = 1$

on obtient :

$y_1 = y(t = 0.2) = 1.22$

$y_2 = y(t = 0.4) = 1.4884$

$y_3 = y(t = 0.6) = 1.8115$

$y_4 = y(t = 0.8) = 2.7022$

4.5 Méthodes de Runge- Kutta

Pour calculer une approximation de la solution à l'instant t_{n+1} en fonction de celle de t_n, la méthode de Runge-Kutta utilise q solutions intermédiaires en fonction de y_n. La méthode de Runge-Kutta de rang q sous sa forme générale s'écrit :

$$\boldsymbol{y_{n+1} = \mathbf{y_n} + \mathbf{h}\Phi(y_n, t_n, h)}$$

où ϕ prend la forme particulière suivante

$$\boldsymbol{\Phi(y_n, t_n, h) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \, k_i}$$

On utilise le développement de Taylor .

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + \ldots$$

Et par comparaison avec la formule (4.1) on trouve les formules de Runge-kutta(d'ordre 2(K_1 et K_2), d'ordre 3(K_1,K_2 et K_3)……..)

4.5.1Runge-Kutta d'ordre 4

Par le développement de Taylor au 4[éme] degré on arrive à la formule de

Range –Kutta d'ordre 4 suivante :

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

avec

$$\boldsymbol{k_1 = hf(t_n, y_n)}$$

$$\boldsymbol{k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})}$$

$$\boldsymbol{k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})}$$

$$\boldsymbol{k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)}$$

Exemple

Résoudre le problème de Cauchy précédant par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en prenant un pas d'intégration h=0.2.

On a

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

avec

$k_1 = hf(t_n, y_n)$=0.2

$k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$=0.22

$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) = 0.222$

$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) = 0.2444$

$\boldsymbol{y_1 = y(t = 0.2) = 1.2214}$

k_1 =0.2442

k_2 =0.2687

$k_3 = 0.2711$

$k_4 = 0.2985$

$\boldsymbol{y_2 = y(t = 0.4) = 1.4918}$

k_1 =0.2983

k_2 =0.3281

$k_3 = 0.3311$

$k_4 = 0.3645$

$\boldsymbol{y_3 = y(t = 0.6) = 1.8220}$

k_1 =0.3764

k_2 =0.4020

$k_3 = 0.4046$

$k_4 = 0.4453$

$\boldsymbol{y_4 = y(t = 0.8) = 2.2278}$

k_1 =0.4455

k_2 =0.4901

$k_3 = 0.4945$

$k_4 = 0.5444$

$\boldsymbol{y_5 = y(t = 1) = 2.72099}$

Remarque :

On observe que la solution obtenue par Runge- Kutta d'ordre 4 est plus proche à la solution exacte que les autres méthodes.