Cours de la théorie des graphes
Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et mathématiques fondamentales
Département de mathématiques et informatiques
Centre universitaire Abdelhafid BOUSSOUF MILA
Anné universitaire 2021/2022

Chapitre 1

Table des matières

Introduction

La recherche opérationnelle peut être considérée comme un ensemble de méthodes utilisables pour élaborer des meilleures décisions. Elle permet de modéliser des problèmes issus du monde réel, identifer les méthodes de résolutions et les outils les plus adaptés face à un problème pratique. Elle fait partie de "l'aide à la décision" qui est un ensemble des techniques permettant pour une personne donnée d'opter pour la meilleure prise de décision possible. Comme toute théorie, la recherche opérationnelle ne cesse de se développer pour élargir son champ d'application dans les différents domaines. Certains problèmes de prise de décision imposent la prise en compte de la présence de plusieurs objectifs pour le preneur de décision. Par conséquent, l'homme d'étude doit s'appuyer sur ces objectifs, qui serviront de critères, pour sélectionner la décision réalisable à proposer au décideur.
L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au 18^{eme} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Konigsberg (les habitants de Konigsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.
La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du 20^{eme} siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de Konig, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erds.
De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseau social, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,.

. . Les graphes constituent donc une méthode qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des mathématiciens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

1

Terminologie et notations

Dans cette section nous présentons la terminilogie et quelques notions de base de la thèorie des graphes.

1.1 Terminologie et définitions générales

le graphe :

Un graphe G est un couple (V(G),E(G)) de deux ensembles disjoints . Les éléments de V(G) sont appelés les sommets (vertices) du graphe G et E(G) contient les arêtes (edges)de G. Une arêtes e=(u,v) entre les sommets u et v peut aussi être notée par uv .

Graphe simple :

Un graphe G est dit simple s'il ne comporte pas de boucle, et si chaque paire de sommets v_i et v_j sont relié par au plus une arête .

Graphe trivial :

Un graphe trivial est un graphe qui contient un seul ou aucun sommet.

Graphe orienté et graphe non orienté :

Un graphe orienté $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles ,un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arcs E.Si $e = (v_i, v_j)$ est un arc du graphe G, v_i est l'extrémité initiale de e et v_j est l'extrémité finale de e. Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini et non vide de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v), notée $e = uv$ où u et v sont les extrémités de e, et on dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que (u, v) est incidente à u et à v. Un sommet est dit isolé s'il n'est adjacent à aucun sommet de G.

Voisinage : Le voisinage ouvert d'un sommet v, noté $N(v)$ est l'ensemble de sommets adjacents à v.
Le voisinage fermé d'un sommet v, noté $N[v]$ est l'ensemble $N[v] = N(v) \bigcup \{v\}$.

Degré d'un sommet :

Le degré d'un sommet v, noté $d_G(v)$ est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Degré d'un graphe :

Le degré d'un graphe est le degré maximum $\Delta(G)$ ou minimum $\delta(G)$ sur tous ses sommets .

Ordre d'un graphe :

L'ordre d'un graphe G est le nombre de sommets de ce graphe.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Théorème 1.1 *(Lemme des poignées de mains) La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Graphe connexe et graphe non connexe :

Un graphe est connexe s'il est possible à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes.

FIGURE 1.1 – (a) Un graphe connexe-(b) un graphe non connexe

Sous-graphe et graphe partiel

Un graphe $H = (V_H, E_H)$ est un *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$ si $V_H \subseteq V(G)$ et $E_H \subseteq E(G)$.
Pour un ensemble de sommets $S \subset V(G)$, le *sous graphe de G induit* par S est le graphe noté $\langle S \rangle$ ayant S pour ensemble de sommets. Les arêtes de $\langle S \rangle$ sont celles de $E(G)$ dont les deux extrémités sont dans S. Le graphe $G' = (V',E')$ est un graphe partiel de G, si E' est inclus dans E. Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G..

1.2 Représentation d'un graphe

1.2.1 Représentation graphique

Il existe une infinité de représentation d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Si on peut dessiner une graphe G dans le plan sans qu'aucune arête non coupe une autre ,on dit que G est planaire.

1.2.2 Représentation Matricielle

Matrice d'adjacences

On peut Représenter un graphe simple par une matrice $(n * n)$ est un tableau de n lignes et n colonnes , (i,j) désignes l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Dans une matrice d'adjacences les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe .Un $\ll 1 \gg$ à la position (i,j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .

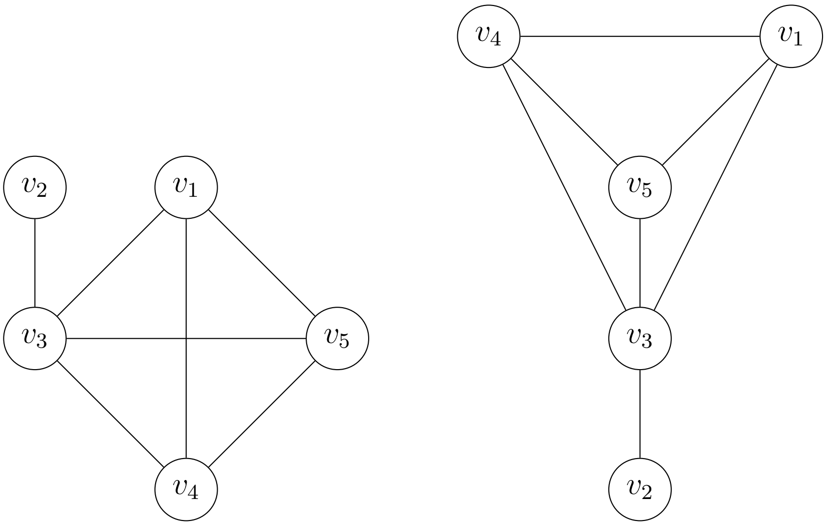

FIGURE 1.2 – (a) Une représentation non planaire du graphe G et (b) son représentation planaire

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

- Elle est carrée.
- Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un 1 sur la diagonale indiquerait une boucle.
- Elle est symétrique : $m_{i,j} = m_{j,i}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
- Il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d ?adjacences d ?aucun autre graphe.

La matrice A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'adjacence du garphe G illustré dans la figure 1.2

Matrice d'incidence

La matrice d'incidence est une matrice n $*$ m où n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arêtes du graphe. l'intersection (i,j) contient la valeur

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si le sommet i est une extrimité de l'arête j;} \\ o, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.3 Couplage

Soit G un graphe simple. Un couplage C de G est un sous-graphe partiel 1-régulier de G. On peut aussi dire qu'un couplage (ou appariement) est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un sommet v est saturé par un couplage C si v est l'extrémité d'une arête de C. Dans le cas contraire, v est insaturé. Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximum. Un couplage parfait est un couplage où chaque sommet du graphe est saturé.