Chapitre 3
Intégration numérique.

3.1Introduction :

L'intégration limitée d'une fonction $f(x)$ sur un domaine délimité par des bornes a et b est de faire calculer l'aire S comprise sous la courbe de a jusque b (fig3.1).

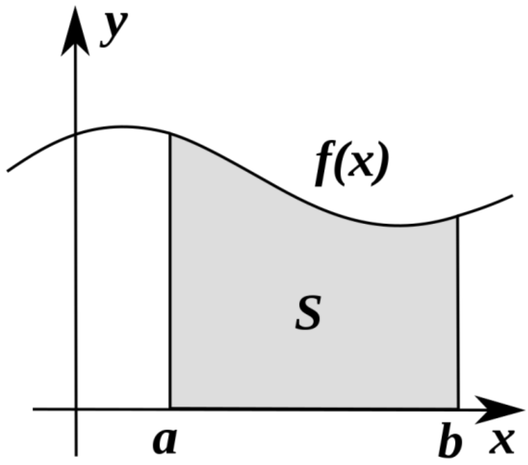

Fig3.1 Représentation graphique de $\int_a^b f(x)\,dx$.

Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée analytiquement. Cependant, ce n'est que très rarement possible, et le plus souvent un des cas suivants se présente :

- Le calcul analytique est long et compliqué.
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-même longues à évaluer.
- L'intégrale n'a pas d'expression analytique.

Dans tous ces cas, on préfèrera calculer numériquement la valeur de l'intégrale.

Aussi lorsque la fonction f n'est connue que par points, par exemple si elle résulte de mesures physique, on peut l'approcher alors par interpolation, Puis on intègre numériquement l'interpole.

3.2 Formules de Newton Cotes :

On suppose que f est connue en $(n+1)$ points x_1,x_2………………,x_{n+1} équidistances, tels que :

$x_1 = a$, $x_2 = a + h$, ……,$x_i = x_{i-1} + h = a + (i-1)\, h$

$et\ x_{n+1} = x_n + h = a + nh = b$

On pose : $\int_{x_1-\mathscr{k}}^{x_{n+1}+\mathscr{k}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\, f(x_i) + \mathscr{k}\ \ldots\ldots\ldots.(3.1)$

Remarque :

-Si $\mathscr{k} = 1$, on dit que la formule (3.1) est de type ouvert.

-Si $\mathscr{k} = 0$, on dit que la formule (3.1) est de type fermé.

3.2.1Formule de type fermé:

3.2.1.1Formule du trapèze :

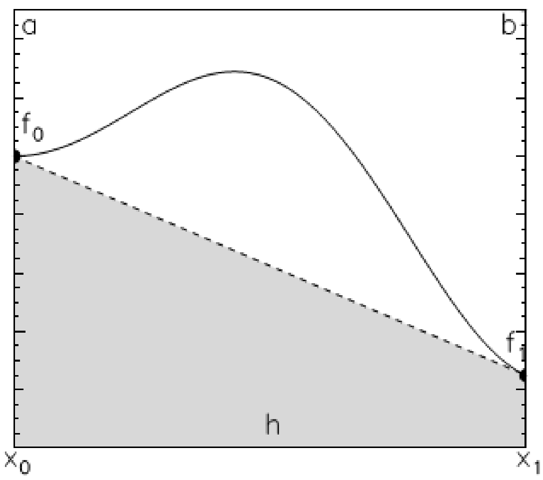

Fig 3.2 Représentation de la méthode du trapèze.

Pour approximer la fonction $f(x)$, cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 (la droite) qui passe par f_0=$f(x_0)$ et f_1=$f(x_1)$

$$\boldsymbol{P_1(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 - f_0}{b - a}\left(x - \frac{a + b}{2}\right)}$$

L'intégrale approchée $I_1 = \int_{x0}^{x1} P_1(x)\,dx$ se calcule alors mathématiquement ou géométriquement et donne :

$$\boldsymbol{I_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b - a}{2}[f(x_0) + f(x_1)]} \quad ,$$

Il s'agit de l'aire du trapèze. Cette méthode nécessite deux évaluations de la fonction f (en a et en b).

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, on trouve alors pour $h = b - a$:

$$\boldsymbol{E_1 = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)}\ , \xi \in [x_0, x_1]$$

$$\boldsymbol{I_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b - a)}{2}[f(x_0) + f(x_1)] \ - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)}$$

3.2.1.2 Formule de Simpson :

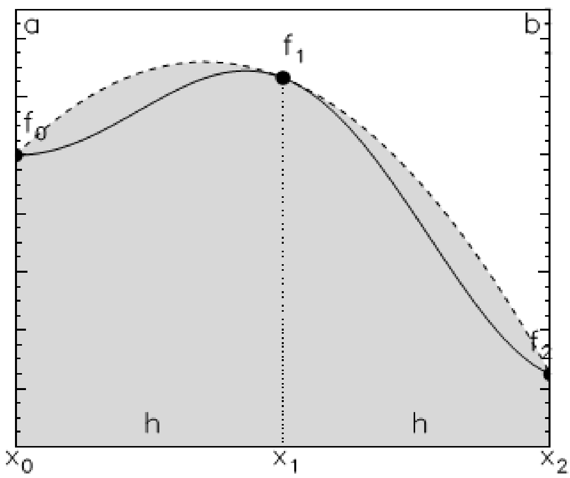

Fig3.3 Représentation de la méthode de Simpson

Pour approximer la fonction f, cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui passe par les trois points f_0=$f(x_0) = f(a)$, f_1=$f(x_1 = \frac{a+b}{2}$)et f_2=$f(x_2) = f(b)$

$$\boldsymbol{P_2(x) = 2\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(x_2 - x_0)^2}(x - x_1)^2 + \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0}(x - x_1) + f_1}$$

L'intégrale approchée $I_2 = \int_{x0}^{x2} P_2(x)\, dx$ se calcule alors simplement et donne :

$$\boldsymbol{I_2 = \int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x_0 = a \quad , x_1 = \frac{a+b}{2}\ et\ \ x_2 = b}$

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, on trouve alors pour $h = \frac{b-a}{2}$

$E_2 = -\frac{h^3}{90} f^{(4)}(\xi)$ avec $\xi \in [x_0, x_2]$

$$\boldsymbol{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_1) + 4\, f(x_2) + f(x_3)] - \frac{h^3}{90}\, f^{(4)}(\xi)}$$

3.2.1.3 Formule de Newton:

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_1) + 3\, f(x_2) + 3f(x_3) + \ f(x_4|] - \frac{3h^5}{80}\, f"[\xi],$$
$$\xi \in [x_1, x_4]$$

3.2.2Formule de type ouvert:

3.2.2.1.-Formule des Poncelet:

$$\int_{x1}^{x3} f(x)dx = 2h\, f(x_2) + \frac{h^3}{3}\; f''(\xi), \qquad \xi \in [x_1, x_3]$$

$$\int_{x1}^{x4} f(x)dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_2) + f(x_3)\right]\right] + \frac{3h^3}{4}\; f''(\xi)\;\; , \xi \in [x_1, x_4]$$

$$\int_{x1}^{x5} f(x)dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_2) - f(x_3) + 2f(x_4)\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)\right]\;\; , \xi \in [x_1, x_5]$$

Remarque

Les méthodes de Newton-Cotes simples ne permettent pas d'atteindre des précisions suffisantes sur des intervalles [a, b] finis et ne sont donc jamais utilisées dans ce cas. Sauf lorsque |b − a|→0, et elles constituent alors la base élémentaire des méthodes généralisées présentées dans la section suivante.

3.3Méthode de trapèze généralisée:

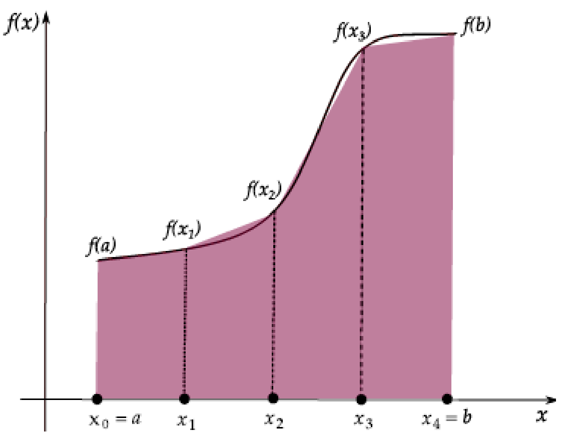

Fig3.4Méthode de trapèze généralisée représentée sur 4 sous-intervalles .

On considère une subdivision de $[a, b]$ en sous intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}]$

De bornes $x_i = a + ih, (i = 0, \dots\dots, n), a = x_0, b = x_n\; et\; h = \frac{b-a}{n}$

On suppose connues les valeurs $f(x_i)$ pour $i = 0, \dots\dots, n$.

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on remplace la fonction$f(x)$ par la droite

$$y = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

L'aire exacte est donc remplacée par l'aire Ti du trapèze par conséquent en sommant les aires des n trapèzes de base $[x_i, x_{i+1}], (i = 0, \ldots\ldots, n)$

On obtient une approximation $T_h$de l'intégrale Icomme $T_i = \frac{h}{2}[f(x_{i+1}) + f(x_i)]$

Alors $\boldsymbol{I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = T_h}$

L'erreur commise par la méthode de trapèze généralisée

L'erreur $E_h = I - T_h$ commise par application de cette méthode est donnée par:

$$\boldsymbol{E_h = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)}, \ \xi \in [a, b]$$

Donc si $M_2 = max_{[a,b]}|f''(t)|$.

Alors:$|\boldsymbol{E_h}| \leq \frac{\boldsymbol{(b-a)^3}}{\boldsymbol{12n^2}}\boldsymbol{M_2}$

3.4Méthode de Simpson généralisée:

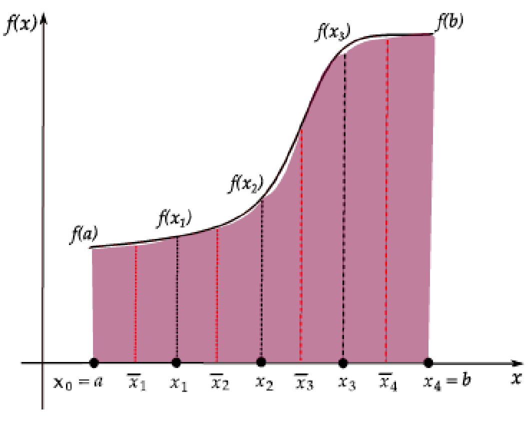

Fig 3.5 Methode de Simpson généralisée représentée sur 4 sous-intervalles .

Dans cette méthode on suppose que n est paire$(soit\ n = 2\boldsymbol{s})$. Puis on subdivise $[a, b]$en **s** sous intervalles égaux$[x_{i-1}, x_{i+1}](i = 1, \ldots\ldots. s - 1)$ de longueur h, puis on remplace $f(x)$ sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ non pas par une droite comme dans les trapèzes, mais par une parabole ayant aux abscisses $x_{i-1}, x_i et\ x_{i+1}$les mêmes valeurs que *f*.

D'autre part la surfacer S$_i$, délimitée par cette parabole, les droites $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$et l'axe des abscisses est :

$$S_{i=}\frac{h}{3}\left(f(x_{i-1}) + 4\,f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

Ceci donne l'approximation de Simpson $S_h\ de\ I$,en sommant les aires Si pour $i = 1$ à $n\ - 1$, finalement on obtient :

$$S_{h=}\frac{h}{3}\left[f(x_0) +\ f(x_{2s}) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \cdots \ldots \ldots f(x_{2s-1})\right) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots \ldots . . f(x_{2s-2}))\right]$$ c'est à dire

$$\boldsymbol{S_{h=}\frac{h}{3}\left[f(x_0) +\ f(x_{2s}) + 4\sum_{k=1}^{2s-1} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=2}^{2s-2} f(x_{2k})\right]}$$

L'erreur commise par la méthode de Simpson généralisée

L'erreur $E_h = I - S_h$commise par application de Simpson généralisée est donnée par:

$$\boldsymbol{E_h} = -\frac{\boldsymbol{(b-a)h^4}}{\boldsymbol{180}}\boldsymbol{f^{(4)}(\xi)} \qquad ,\xi \in [a,b]$$

Donc si $M_4 = max\ _{[a,b]}\left|f^{(4)}(t)\right|$

$$alors|\boldsymbol{E_h}| \leq \frac{\boldsymbol{(b-a)5}}{\boldsymbol{180n^4}}\boldsymbol{M_4}$$

Remarque2 :

En général la méthode de Simpson donne une meilleure approximation que celle des trapèzes car l'erreur commise dans la méthode des trapèzes est proportionnelle à h^2, alors que pour Simpson elle est proportionnelle à h^4,et comme par transformation de la variable d'intégration ou peut toujours se ramènes de $[a, b]$ a $[0,1]$et qu' alors $h \in [0,1]$ où a donc $h^4 < h^2$

Ttrapèzes→ $E \simeq \frac{b-a}{12} M_2 h^2$

Simpson → $E \simeq \frac{b-a}{180} M_4 h^4$

Exemple :

Déterminer par la méthode des trapèzes l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

1- Soit T l'approximation de I par la méthode des trapèzes, le pas h est donné par : $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\pi/2}{4} = \pi/8$

$$T = \frac{h}{2}[y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)]$$

$$= \frac{\pi}{16}[0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)] = 0.987116$$

2- Méthode de Simpson:

Soit S l'approximation de I par la méthode de Simpson celle-ci s'écrit :

$$s = \frac{h}{3}[y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2]$$

$$= \frac{\pi}{8}\frac{1}{3}[0 + 1 + 4(0382683 + 0.92388) + 2.0{,}7071007] = 1.000135$$

-Les points d'appui donnés dans cet exemple correspondent à la fonction sin x et $I = \int_0^{\pi/2} \sin x \; d\,x = 1$, on constate donc que la différence entre S et I est :

$|s - I| = 0.000135 < |T - I| = 0.012884$