Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques 2021-2022   Matière : *Analyse 03*

Solution de l'exercice n°1 I) Calculons le rayon et le domaine de convergence ainsi que la somme de chacune des séries entières suivante :

1) $f_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n x^n$, $a \neq 0$.

Rayon de convergence : On a $a_n = a^n$, ce qui imolique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Domaine de convergence : Si $|x| = \frac{1}{a}$, on a $|a^n x^n| = 1 \nrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$, la série est donc divergente et par suite $D_1 = \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[$.

La somme :

$$\begin{aligned} S_1 &= f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n \\ &= \frac{1}{1-ax}, \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[. \end{aligned}$$

2) $f_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Rayon de convergence : On a $a_n = n+1$, ce qui imolique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = 1.$$

Domaine de convergence : Si $|x| = 1$, on a $|(n+1)x^n| = n+1 \to +\infty \neq 0$, quand $n \to +\infty$, la série est donc divergente et par suite $D_2 =]-1, 1[$.

La somme :

$$\begin{aligned} S_2 &= f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\end{aligned}$$

3) $f_3(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.
Rayon de convergence : On a $a_n = n^2$, ce qui imolique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = 1.$$

Domaine de convergence : Si $|x| = 1$, on a $|(n+1)x^n| = n^2 \to +\infty \neq 0$, quand $n \to +\infty$, la série est donc divergente et par suite $D_3 =]-1, 1[$.

La somme :

$$\begin{aligned}
S_3 &= f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,x^n \\
&= x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,x^{n-2} \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}, \text{ pour tout } x \in]-1,1[
\end{aligned}$$

4) $f_4(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n$.
Rayon de convergence : On a $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n+1}$, ce qui imolique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Domaine de convergence : Si $x = \frac{1}{2}$, on a $(-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ série de Leibnitz, donc elle est convergente.
Si $x = -\frac{1}{2}$, on a $(-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n = \frac{1}{n+1} \overset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$, donc elle est divergente.
Finalement $D_4 = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
La somme :

$$\begin{aligned}
S_4 &= f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} \\
&= \frac{1}{2x}\ln(1+2x)\,, \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].
\end{aligned}$$

II) On se donne la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1) Trouvons le rayon de convergence de cette série et calculons sa somme S.

Rayon de convergence : On a $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$, ce qui imolique $R = \left[\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = 1$.

Domaine de convergence : Si $|x| = 1$, on a $\left|\frac{x^n}{n(n-1)}\right| = \frac{1}{n(n-1)} \overset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$, donc elle est convergente. Finalement $D = [-1, 1]$.

La somme :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ pour tout } x \in]-1,1[\\ &= x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ pour tout } x \in]-1,1[\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x\right), \text{ pour tout } x \in]-1,1[\\ &= -x\ln(1-x) - [-\ln(1-x) - x], \text{ pour tout } x \in]-1,1[\\ &= (1-x)\ln(1-x) + x, \text{ pour tout } x \in]-1,1[. \end{aligned}$$

2) Calculons $S(1)$ et $S(-1)$. Puisque la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge aux bords de l'intervalle de convergence, d'après Abel $S(1)$ et $S(-1)$ existent et de plus :

$$S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) + x = 1$$

et

$$S(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x\to -1^+} (1-x)\ln(1-x) + x = 2\ln(2) - 1.$$

Solution de l'exercice n°2 On considère une série entière de terme général $a_n t^n$, de rayon de converge $R > 0$, et de somme S. On suppose que S est une solution de l'équation différentielle

$$(1+t^2)\ddot{f}(t) = 2f(t). \tag{1}$$

1) Relation entre les coefficients a_n et a_{n+2} :

On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. L'équation (1) devient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

ou d'une manière équivalente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\,a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En rassemblant les termes de même degré, on obtient :

$$a_{n+2} = -\frac{(n-2)}{n+2} a_n.$$

2) En prenant $n = 2$, on trouve $a_4 = 0$ donc aussi $a_{2p} = 0$, pour tout $p > 2$.

3) Les conditions $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 1$ impliquent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc aussi $a_2 = 0$. La valeur de a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ se calcule par récurrence à partir de a_1 :

Pour $n = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

Pour $n = 3$, $a_5 = -\frac{1}{5} a_3 = -\frac{1}{3 \times 5}$.

Supposons que jusqu'à l'ordre $2p-1$, pour $p \geq 2$ on ait :

$$a_{2p-1} = \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)},$$

on obtient alors :

$$a_{2p+1} = -\frac{2p-3}{2p+1} \times \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

La formule est vérifiée à l'ordre $2p+1$ et donc la récurrence est bien vérifiée et on a :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p+1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

4) La série entiére de terme général $a_n t^n$ est majorée sur $[-1, +1]$ par la série numérique de terme général $\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ qui est une série convergente. La série entiére de terme général $a_n t^n$converge donc normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$. Son rayon de convergence est 1 puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1$.

5) En dérivant terme à terme la somme de la série entiére de terme, on trouve :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\dot{s}(t)-1}{t}, \text{ pour tout } t \in [-1,1] \text{ et } t \neq 0 \\ &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p}}{(2p-1)} - 1}{t}, \text{ pour tout } t \in [-1,1] \text{ et } t \neq 0 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p-1}}{(2p-1)}, \text{ pour tout } t \in [-1,1] \ . \end{aligned}$$

D'où en dérivant terme à terme, on obtient :

$$\dot{g}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} t^{2p-2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} = \frac{1}{1+t^2}.$$

En intégrant, on trouve, avec la condition $g(0) = 0$, $g(t) = \arctan(t)$.

6) On en déduit que la fonction s peut s'écrire :

$$s(t) = \int_0^t t \arctan(t) dt + t.$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(t^2+1\right)\arctan(t) + \frac{t}{2}.$$

<u>Solution de l'exercice n°3</u> Soit $f(t,x) = \dfrac{x\sin(t)}{x^2+1-2x\cos(t)}$.

1) Développons f en série entière selon les puissances de x.

Nous avons

$$f(t,x) = \frac{x\sin(t)}{x^2+1-2x\cos(t)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-x\exp(it)} - \frac{1}{1-x\exp(-it)}\right).$$

Donc, pour $|x| < 1$, on a :

$$f(t,x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\exp(int) - \exp(-int)\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nt) x^n.$$

2) Soit $|x| < 1$ fixé. La série de fonctions de terme général $\sin(nt)x^n$ est normalement convergente sur le domaine $t \in [0,\pi]$ car elle est dominée par

la série numérique convergente de terme général x^n. On peut donc l'intégrer terme à terme sur $[0, \pi]$; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(t,x)dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \sin(nt)x^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= 2 \arg th(x).
\end{aligned}$$