Chapitre 2

Intégrale impropres

2.1 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$,pour tout x dans $[a, +\infty[$, On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Définition 2.1.1 *On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a, +\infty[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et on note*

$$\lim_{x \to -\infty} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a, +\infty[$.

Exemple 2.1.2 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, on a*

$$\int_1^x f(t)\, dt = \frac{\ln x}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x f(t)\,dt = 1$

donc l'intégrale impropre de f *est convergente sur* $[1,+\infty[$.

Remarque 2.1.3 *Si la fonction* $f:]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable(au sens de Riemann) sur* $[x,b]$,*pour tout* x *dans* $]-\infty,b]$, *on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur* $]-\infty,b]$ *si la fonction* $F(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$ *admet une limite quand* x *tend vers* $-\infty$ *et on note*

$$\lim_{x\to-\infty}\int\limits_x^b f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^b f(t)\,dt$$

Remarque 2.1.4 *Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert* $]-\infty,+\infty[$ *et intégrable sur tout intervalle* $[x,y], -\infty < x < y < +\infty$, *on dit que son intégrale impropre sur* $]-\infty,+\infty[$ *converge si, pour* $-\infty < c < +\infty$, *ses intégrales impropres sur* $]-\infty,c]$ *et* $[c,+\infty[$ *existent.*

2.1.1 Intégrale impropre de fonctions positives

Proposition 2.1.5 *Soient* f *et* $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme* $[a,\beta], \forall\beta \in [a,+\infty[$. *On suppose que* $f \leq g$, *alors*

1) Si l'intégrale impropre de g *est convergente sur* $[a,+\infty[$, *implique que l'intégrale impropre de* f *est convergente et on a*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

2) Si l'intégrale impropre de f *est divergente sur* $[a,+\infty[$, *implique que l'intégrale impropre de* g *est divergente.*

Corollaire 2.1.6 *Soient f et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$c_1 f \leq g \leq c_2 f$$

Alors, l'intégrale impropre de f est convergente si et seulement si l'intégrale impropre de g est convergente.

Corollaire 2.1.7 *Soient f et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Alors, l'intégrale impropre de f sur $[a, +\infty[$ est convergente si et seulement si celle de g est convergente.

Exemple 2.1.8 $f(x) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}, g(x) = \frac{1}{t^2}$ *deux fonctiond définies sur $[1, +\infty[$ et*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

comme l'intégrale impropre de g sur $[1, +\infty[$ est convergente alors l'intégrale impropre de f sur $[1, +\infty[$ est convergente.

2.2 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$,pour tout x dans $[a, b[$, On pose

$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$$

Définition 2.2.1 *On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a,b[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers b et on note*

$$\lim_{x\to b}\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a,b[$.

Exemple 2.2.2 *$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{-x}}$ une fonction définie sur $\left[-1,0\right[$, et on remarque que cette fonction est intégrable en sens Riemann sur $\left[-1,\alpha\right],\forall\alpha\in\left[-1,0\right[$, et $\int_{-1}^{x}f\left(t\right)dt=-2\sqrt{-x}+2$ alors $\lim_{x\to 0}\int_{-1}^{x}f\left(t\right)dt=2$*

donc f admet une intégrale impropre convergente sur $\left[-1,0\right[$.

Remarque 2.2.3 *Si la fonction $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable(au sens de Riemann) sur $[x,b]$,pour tout x dans $]a,b]$, on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur $]a,b]$ si la fonction $F\left(x\right)=\int_{x}^{b}f\left(t\right)dt$ admet une limite quand x tend vers a et on note*

$$\lim_{x\to a}\int_{x}^{b}f\left(t\right)dt=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$$

Remarque 2.2.4 *Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$ et intégrable sur tout intervalle $[x,y],a<x<y<b$, on dit que son intégrale impropre sur $]a,b[$ converge si, pour $a<c<b$, ses intégrales impropres sur $]a,c]$ et $[c,b[$ existent.*

Exemple 2.2.5 *L'intégrale impropre $\int_{-1}^{+1}\frac{1}{1-t^2}dt$ est divergente car $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-t^2}dt$ est divergente.*

2.2.1 Intégrale absolument convergente

Définition 2.2.6 *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme* $[a, \alpha], \forall \alpha < b$*. On dit que l'intégrale impropre de* f *est absolument convergente sur* $[a, b[$ *si l'intégrale impropre de* $|f|$ *est convergente sur* $[a, b[$*.*

Exemple 2.2.7 *L'intégrale impropre sur* $]0, 1]$ *de la fonction* $f : x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *est absolument convergente.*

car

$$0 \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

et $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x}$ *et* $\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$