Resumé Chapitre 3

I Spectre d'un opérateur

E un e. de Banach. $T \in \mathcal{L}(E)$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|T^n\| \leq \|T\|^n$; $T^0 \in I$

I.1- Opérateurs inversibles

<u>Théorème</u> si $\|I-T\| < 1$ alors T est inversible.

I.2. <u>Spectre</u> :

<u>Déf</u>:

1) On dit qu'un nombre réel ou complexe λ est une valeur propre de T s'il existe $x \in E$, non nul, tel que $Tx = \lambda x$; autrement dit si $T - \lambda I$ n'est pas injectif.

2) λ est une valeur spectrale de T si $T - \lambda I$ n'est pas inversible (pas bijectif).

<u>Donc</u> : λ v. p. si $\exists x \in E, x \neq 0$: $\lambda x = Tx$.
λ v. p si $T - \lambda I$ n'est pas inj.
λ v. spectrale si $T - \lambda I$ n'est pas inversible (pas bij).

<u>Notation</u>

$\sigma(T)$: spectre de T.

$\sigma_p(T)$: ens des v. p. = spectre ponctuel.

$\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$

* si $\dim E < \infty$ alors $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

I.3 <u>Définition</u>

1) $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ = ens. résolvant de T.

2) $R_T : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ t. que : $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ est la résolvante de T.

I.4 Théorème

$\sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
et $|\lambda| \leq T$, $\forall \lambda \in \sigma(T)$.

I.5. Th. de Stone :
Si E est un e. complexe, alors $\sigma(T) \neq \phi$.

I.6. Rayon spectrale :

Def : Si $\sigma(T) \neq \phi$, $r(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$.

* Cette borne supérieure est atteinte ($\sigma(T)$ compact)

I-6 Théorème (formule du rayon spectrale)

1) $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$ existe et $\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$.

2) a) $r(T) \leq \lim_n \|T^n\|^{1/n}$

b) Si E est complexe : $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$.

II Opérateurs compacts

Def Soient E, F deux e. de Banach. $T \in \mathcal{L}(E,F)$

T compact si $T(B_E)$ est compacte dans F.

* dim $T(E) < \infty$ alors T est compact. (T est dit de rang fini)

- $\mathcal{K}(E,F)$: ens des ops compacts.

$\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E,F)$.

- Corollaire $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $(T_n)_n$ suite de ops de rangs finis : $\lim_n \|T_n - T\| = 0 \Rightarrow T$ est compact.

- Théorème : E, F e. de Banach. $T : E \to F$
T compact. $\Rightarrow$ ($R(T) = T(E)$ fermée ssi T de rang fini).

Proposition (propriété d'idéal).
E, F, G 3 e. de Banach.
$T \in \mathcal{L}(E,F)$, $S \in \mathcal{L}(F,G)$.
$T \in \mathcal{K}(E,F) \Rightarrow S\circ T \in \mathcal{K}(E,G)$
$S \in \mathcal{K}(F,G) \Rightarrow S\circ T \in \mathcal{K}(E,G)$.

Théorème de Schauder.
$T \in \mathcal{K}(E,F) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.

Propriétés spectrales des ops compacts.

- $U \in \mathcal{K}(E) \Rightarrow \begin{cases} \dim \operatorname{Ker}(I-U) < \infty \\ R(I-U) \text{ est fermé} \\ (I-U) \text{ inj} \Rightarrow (I-U) \text{ inversible} \end{cases}$

<u>Corollaire</u> (alternative de Fredholm).

- $U \in \mathcal{K}(E) \Rightarrow \begin{cases} x - Ux = 0 \text{ admet une infinité de sol} \\ \text{ou bien} \\ \forall y \in E ,\ \exists!\, x \in E : x - Ux = y. \end{cases}$

<u>Théorème</u> (Riesz).
E e. de Banach. $\dim E > \infty$. , $T \in \mathcal{K}(E)$

<u>Alors</u>

a) $0 \in \sigma(T)$

b) $\forall \lambda \in \sigma(T),\ \lambda \neq 0$: λ est une v.p de T
i.e : $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.
et $\dim E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$ (E_λ : s-e propre associé à une v.p. λ)

c) $\sigma(T)$ est dénombrable
et s'il est infini on peut mettre :
$\sigma(T) - \{0\} = \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \to 0$.

Théorie spectrale des ops auto-adjoints dans un e. de Hilbert.

- $U \in \mathcal{L}(H)$: U auto-adj.
U inversible $\Leftrightarrow \exists\, C > 0 : \|Ux\| \geq C\|x\|,\ \forall x \in H$.

Spectre d'un op. auto-adj. dans un e. de Hilbert

$U : H \longrightarrow H$; $U \in \mathcal{L}(H)$.

U^* inversible ssi U inversible et on a : $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

$T^* - \lambda I$ est l'adjoint de $T - \lambda I$.

Théorème

T op. auto-adj

$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

$\sigma(T) \subseteq [m, M]$ où $m = \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle$; $M = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle$

Rq* T auto-adj $\Rightarrow$ v.p de T sont réelles.

Théorème T op auto-adj, $T \in \mathcal{L}(H)$.

alors : $m, M \in \sigma(T)$

Corollaire H e. de Hilbert. $T \in \mathcal{L}(H)$,

T auto-adj, donc $\sigma(T) \neq \phi$.

Corollaire T auto-adj, $T \in \mathcal{L}(H)$, H e. de Hilbert

$r(T) = \|T\|$.

_ Décomposition spectrale _ des ops auto-adj compacts

Proposition Tout op. auto-adj compact sur un e. de Hilbert ($H \neq \{0\}$) possède au moins une v.p.

Lemme : T op. auto-adj sur un e. de Hilbert H.

a) $E_{\lambda} \perp E_{\mu}$, $\forall \lambda, \mu$ v. p. de T.

b) F s-e invariant par $T \Rightarrow F^{\perp}$ s-e invariant par T et $\sigma(T) = \sigma(T_{|F}) \cup \sigma(T_{F^{\perp}})$.

Théorème* H e. de Hilbert séparable. $H \neq \{0\}$.
T op. auto-adj compact sur H.
Alors : $\exists$ une base orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$ de H formée de v. p. de T et l'on a,

$$\forall x \in H : \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n ,$$

où λ_n est la v. p. associée à e_n.

Théorème d'Ascoli :
Soit X un e. m. et compact. $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$

$\mathcal{F}$ relat. compact $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F} \text{ bornée} \\ \mathcal{F} \text{ equicontinue.} \end{cases}$

Déf
$\mathcal{F}$ equicontinue si :
$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \ d(x,y) < \delta \Rightarrow [|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{F}]$

qd X est compact, on a equicontinuité uniforme, i.e :
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X) : \ d(x,y) \leq \delta \Rightarrow [|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{F}]$