Solution de la serie 1

1 Exo5

1- Soit $T : (x_n) \to T(x_n) = (a_1x_1, a_2x_2, ...)$

et soit $T_n : (x_n) \to T_n(x_n) = (a_1x_1, a_2x_2, ...a_nx_n, ..)$

Appliquer le th de la borne uniforme

2- On vérifie que $\|T_n\| = \max |a_k|$

on déduit que $\underset{n}{sup} |a_n| < \infty$.

2 Exo6

On applique le th de Banach-Steinhaus avec $E = G$, $F = \mathbb{R}$ et $I = B'$

$\forall b \in B' : T_b(x) = \langle b, x\rangle$, $x \in G$

Alors, $\exists c > 0$ tel que$|\langle b, x\rangle| \leq c \|x\| , \forall b \in B', \forall x \in G$

Donc $\|b\| \leq c, \forall b \in B'$

3 Exo8

1a- Il suffit de montrer que $I : X = (E, \|\|_\infty) \to Y = (E, \|\|_1)$

réalise une bijection de $D(A)$ dans $R(A)$

1b- $\|I\| = 1$

2-$\frac{\|Tf_n\|_Y}{\|f_n\|_X} \to \infty$

3- Si Y etait complet on appliquerait le th de Banach des isomotphismes et I^{-1} serait continue.

4 Exo9

Considèrer T comme un opérateur de E sur $R(T)$ (surjectif).

Par l'absurde, soit (x_n) une suite de E telle que

$\|x_n\|_E = 1 et \|Tx_n\|_F + |x_n| < \frac{1}{n}$

Donc, $\exists\ c > 0$ telle que: $T(B_E) \supset cB_F$ (th app ouverte)

Alors $\exists\ y_n$ t que $Tx_n = Ty_n$ et $\|y_n\| < \frac{1}{nc}$ ($\|Tx_n\| < \frac{1}{nc}$)

donc on peut ecrire $x_n = y_n + z_n$ avec $z \in N(T)$ et $\|y_n\|_E \to 0$

d'où $|z_n|_E \to 1$

D'autre part $|x_n| < \frac{1}{n}$ d'où $|z_n| < \frac{1}{n} + |y_n| \leq \frac{1}{n} + M |y_n|$ et $|z_n| \to 0$

Contradiction car les normes $|.|$ et $\|.\|_E$ sont équivalentes dans $N(T)$ qui est de dimension finie.

5 Exo10

$\forall \epsilon < 0, \exists a \in G : \|x - a\| \leq d(x, G) + \epsilon$

et, $\forall \epsilon < 0, \exists b \in L : \|x - b\| \leq d(x, L) + \epsilon$

On pose $z = a - b$

$\exists c > 0 : z = a' + b'$ où $a' \in G$ et $b' \in L$

donc $a - a' = b + b' \in G \cap L$

de plus,

$$\begin{aligned}
d\left(x, G \cap L\right) &\leq \left\|x-\left(a-a^{\prime}\right)\right\| \\
&\leq \|x-a\|+c\|z\| && (1)\\
&\leq (1+c)\|x-a\|+c\|x-b\| && (2)\\
&\leq (1+c)\, d(x, G)+c d(x, L)+(1+2 c) \epsilon && (3)\\
&\leq (1+c)\,(d(x, G)+d(x, L))+(1+2 c) \epsilon && (4)
\end{aligned}$$

faisant tendre ϵ vers 0, et prenant $c^{\prime}=1+2c$, on obtient le résultat.

6 Exo11

$1 \Rightarrow 2$: Il suffit de prendre $y=0$

$2 \Rightarrow 1$: On suppose que l'equation $Ax=y$ admet deux solutions

$1 \Rightarrow 3$: On définit l'opérateur $B : \underset{y \rightarrow By=x}{R(A) \rightarrow E}$

$3 \Rightarrow 1$: On suppose B l'inverse à gauche de A : $B=A_{g}^{-1}$

et on suppose que x_1 et x_2 sont deux solutions de l'equation $Ax=y$

7 Exo12

$1 \Leftrightarrow 2$ evident

$1 \Rightarrow 3$: On définit l'operateur $B : \underset{y \rightarrow By=x}{F \rightarrow E}$

$3 \Rightarrow 1$: Soit $B=A_{d}^{-1}$. donc By est une solution de $Ax=y$

8 Exo13

Sachant que $\exists c>0 : \|Ax\| \geq c\|x\|$, il suffit de prendre $\|Ax\|=0$

donc A admet un invrse à gauche d'aprés l'exo13

et comme $\overline{R(A)}=\Im m A=F$, il suffit de montrer que $R(A)$ est fermé(pour utiliser le resultat de l'exo13)

Soit $(y_n) \in R(A)$ telle que $y_n \rightarrow y$

donc $\exists (x_n) \in E$:$Tx_n=y_n$

d'aprés b),

$$\|x_n-x_m\| \leq \frac{1}{c}\|Ax_n-Ax_m\| \tag{5}$$

$$\|x_n-x_m\| \leq \frac{1}{c}\|y_n-y_m\| \tag{6}$$

d'où (x_n) est de Cauchy, par conséquent (x_n) converge vers x dans E

Par continuité de la limite on obtient: $y \in R(A)$

par l'exo13, A admet un inverse à droite, donc A^{-1} existe

D'autre part,

$$A^{-1} : \underset{y \rightarrow A^{-1}y=x}{R(A) \rightarrow E} \tag{7}$$

et $\forall y \in R(A) : \|x\|=\|Ay\| \leq \frac{1}{c}\|Ax\|$, d'où A^{-1} est borné

9 Exo14

Comme $\|A\| \leq 1$, la serie $\sum\|A\|^{n}<\infty$, d'où la serie $\sum A^{n}<\infty$ cv uniformément

Soit $S=\sum A^{n}$

$S(I-A)=I$ et $(I-A)S=I$

10 Exo15

On a:$\|A-B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$

$$\begin{aligned} \left\|A^{-1}(A-B)\right\| &\leq \left\|A^{-1}\right\|\|A-B\| \quad (8)\\ &< \left\|A^{-1}\right\|\frac{1}{\|A^{-1}\|}=1 \quad (9)\end{aligned}$$

donc,$I-$ $A^{-1}(A-B)$ admet un inverse borné(d'aprés l'exo 14)
d'où $I-A^{-1}(A-B)=A^{-1}B$ admet un inverse borné
$\left[I-A^{-1}(A-B)\right]A^{-1}B=I$
donc B admet un inverse à gauche
De m$\widehat{e}$me, $\left\|(A-B)A^{-1}\right\|<1$, d'où:
$BA^{-1}\left[\left(I-(A-B)A^{-1}\right)\right]^{-1}=I$
donc B admet un inverse à droite
On vérifie que $B_g^{-1}=B_d^{-1}=B^{-1}$

11 Exo16:

On pose: $\epsilon=\frac{1}{\|A^{-1}\|}$. alors

$$\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n>n_0:\|A_n-A\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad (10)$$

D'aprés l'exo 16 A_n admet un inverse borné A_n^{-1} (car $\|A-A_n\|=\|A_n-A\|$)

$$A_n^{-1}=\left(I-A^{-1}(A-A_n)\right)^{-1}A^{-1} \quad (11)$$

On a $\lim\limits_n A_n^{-1}=\lim\limits_n\left(I-A^{-1}(A-A_n)\right)^{-1}A^{-1}=A^{-1}$