Résumé du chp. 2. S_2

I Espace dual.

E e.n sur $\mathbb{K}$ de norme $\| \|$. E' e. des formes lin et continues sur E. $\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} f(x)$

II Forme analytique du th de Hahn-Banach. Prolongement des formes linéaires

II.1 **Théorème 1**

Si $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$ E.v.n., P app. lin t.que:

1) $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ $\forall x\in E$, $\forall \lambda > 0$. ... (1)

2) $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ $\forall x,y\in E$ ... (2)

et $G \subset E$, un s-e-v avec g app. lin

$g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ t. que: $g(x) \leq P(x)$ $\forall x\in G$ .. (3)

Alors $\exists f$ une forme lin définie sur E qui prolonge g, i.e; $g(x) = f(x)$ $\forall x\in G$

et $f(x) \leq P(x)$ $\forall x\in E$

II 2. $\boxed{\text{Corollaire 1}}$ E un $\mathbb{K}$-e.v.n

G un s-e-v de E. $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$. g est une app lin continue de norme: $\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x\in G \\ \|x\|\leq 1}} g(x)$

Alors $\exists f\in E'$ qui prolonge g et t. que: $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$

II.3 $\boxed{\text{Corollaire 2}}$ $\boxed{\forall} x_0 \in E$, $\boxed{\exists} f\in E'$ / $\boxed{\|f_0\| = \|x_0\|}$ et $\boxed{\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2}$

Rq: f est unique si E' est strictement cvx (Ex e. de Hilbert ou $E = L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$)

— On note: $F(x_0) = \{ f_0 \in E' : \|f_0\| = \|x_0\|$ et $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2 \}$

l'app multivoque: $x_0 \longmapsto F(x_0)$ est l'app de dualité de E dans E'.

II. 4 **Corollaire 3** $\forall x\in E$, $\boxed{\|x\| = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|}$

Forme géométrique du th. de Hann-Banach.

e.v.n.

Définition

Un hyperplan affine est un ens. de la forme

$H = \{u \in H : f(u) = \alpha\}$ $\alpha \in \mathbb{R}$; $f \neq 0$. f. forme lin

H est l'hyperplan $[f = \alpha]$

II.6 **Proposition**

l'hyperplan $[f=\alpha]$ est fermé $\Leftrightarrow$ f est continue.

Définition $A \subset E$, $B \subset E$

$[f=\alpha]$ sépare A et B au sens large si

$\forall x \in A$: $f(u) \leq \alpha$ et $\forall x \in B$: $f(u) \geq \alpha$.

$[f=\alpha]$ sépare A et B au sens strict si $\exists \varepsilon > 0$:

$f(u) \leq \alpha - \varepsilon$, $\forall x \in A$ et $f(u) \geq \alpha + \varepsilon$ $\forall x \in B$

II.7. **Th. de Hann-Banach. 1ère forme géométrique**

E. e.v.n. $A \cap B = \phi$, $A \neq \phi \neq B$

A, B deux ens. cvx non vides, $A \subset E$ et $B \subset E$

si A est ouvert $\Rightarrow \exists$ un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large

II.8. Th. de Hann-Banach. 2e forme géométrique

E. e.v.n.

Soient A et B deux ens convexes. $A \subset E$, $B \subset E$.

$A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $A \cap B = \phi$

$\left.\begin{array}{l}A \text{ fermé} \\ B \text{ compact}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Remarque si dim $E < \infty$. on peut toujours séparer au sens large deux cvxes A et B non vides disjoints (sans hypothèses suff).

II.9. **Corollaire** E e.v.n. ; $F \subset E$, F s-e-v t.q.

$\overline{F} \neq E$.

Alors $\exists f \in E'$, $f \neq 0$: $\langle f, x \rangle = 0$ $\forall x \in F$.

Remarque
Lorsque l'on cherche à prouver qu'un s-e-v est dense, on considère une forme linéaire et continue f sur E, t.q. $f=0$ sur F, et on prouve que f est identiquement nulle sur E.

II-9. Cas d'un e- complexe : (suite forme analytique)
E e.v. complexe. P semi-norme sur E.

Théorème E e.v. complexe. P semi-norme sur E. $M \subset E$. t.q.:
g forme lin sur M, $M \subset E$. t.q.:
$$|g(x)| \le P(x) \; ; \quad \forall x \in M.$$
Alors : $\exists f \in E'$ t.q. : $f(x) = g(x)$ $\forall x \in M$
et $|f(x)| \le P(x)$ $\forall x \in E$.

*corollaire
Propriétés E e.n. M variété linéaire de E ; $x_0 \notin M$; $d(x_0, M) = d$
$(d = \inf\limits_{x \in M} \|x - x_0\|)$
Alors : $\exists f \in E'$ t.q. : (f défini sur E tout entier)
i) $\langle f, x\rangle = 0$ $\forall x \in M$.
ii) $\langle f, x_0\rangle = 1$
iii) $\|f(\cancel{x})\| = \frac{1}{d}$.

III Relation d'orthogonalité

E e. de Banach. $M \subset E$, M s-e v. de E.

1 **Déf** : E e. de Banach. $M \subset E$, M s-e v. de E.
$M^{\perp} = \{f \in E' : \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in M\}$.
$M^{\perp}$ est un s-e-v fermé de E'.
- Si N s-e.v de E', $N \subset E'$
$N^{\perp} = \{x \in E : \langle f, x\rangle = 0, \; \forall f \in N\}$.
$N^{\perp}$ est fermé dans E'.

III 2 **Théorème** M s-e.v de E. Alors :
1) $\boxed{(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}}$
2) Si $N \subset E'$, alors $\boxed{(N^{\perp})^{\perp} \supset \overline{N}}$

Soit E e.v.n et soit $x \in E$, $x \neq 0$
Alors $\exists f \in E'$ / $\|f\| = 1$ et $\langle f, x\rangle = \|x\|$

Cas Particulier . e. de Hilbert

Théorème de Riez sur la forme générale d'une fonctionnelle lin dans l'e de Hilbert

<u>Théorème</u>

Soit H un e. de Hilbert cplx ou réel. A toute fonctionnelle lin bornée f définie partout sur H correspond un élément et un seul $y \in H$ t.q $\forall u \in H : \langle f, u \rangle = \langle y, u \rangle$ et ceci avec $\|f\| = \|y\|$

IV 2. <u>Espaces reflexifs</u>

E e. de Banach.

$E', E'', E''', \dots$ sont tous des e. de Banach.

Si E est un e. de Hilbert : $E \simeq E' \simeq E'' \simeq \dots$

IV.3. <u>Def</u> E e.n, $\tilde{E}$ e.n

E est immergé $\tilde{E}$ s'il existe une f $g : E \longrightarrow \tilde{E}$, $u \longmapsto g(u)$ et $\beta > 0$

t.que $\|g(u)\| \leq \beta \|u\|$ $\forall x \in E$: et $\|g(u)\| = \|u\|$

- si $X = (E, \| \|_1)$; $\tilde{X} = (E, \| \|_2)$ et

on dit que l'immersion de X dans $\tilde{X}$ est isométrique

IV.4 <u>Théorème</u>

T e. de Banach E admet une immersion isométrique dans E'.

IV.5 <u>Définition</u>

- E est <u>reflexif</u> si $(E')' = E$. (Ex. de Hilbert)
- E est non reflexif : $E \neq E' \neq E'' \neq \dots$
- Si X est Banach. F s-e de E

IV 6 - <u>Théorème</u> E e. de Banach

E reflexif => F reflexif

IV-7. <u>Théorème</u> E e-Banach. E reflexif <=> E' reflexif.

E e. de Banach.

IV.8 <u>Théorème</u> : E e. de Banach.

E reflexif <=> Toute suite bornée (en norme) de ses

4

'éléments contient une s-suite cv faiblement vers un pt de E.

V Opérateurs symétriques et auto-adjoints

H e. de Hilbert. A op. lin défini sur $D(A)$. $\overline{D(A)} = H$.

Soit A^* l'adjoint de A.

V.1 Def :

Si $D(A) \subset D(A^*)$
et $A^* x = Ax$, $\forall x \in D(A)$ } on dit que A est un op. symétrique.

(A^* extension de A)

Rq : comme $\overline{D(A)} = H$ et $D(A) \subset D(A^*)$ donc $\overline{D(A^*)} = H$
(donc $\exists$ un op. $(A^*)^*$ qui est fermé)

V.2 Définition

Si $A = A^*$: on dit que A est auto-adjoint.

V.3 Opérateurs de projections orthogonales

Rq Si P est une projection sur M alors : $x \in M \Leftrightarrow Px = x$.

V.4 Propriétés des projecteurs

1) Tout projecteur est un op lin défini partout dans H à valeurs dans H.

2) $P \in \mathcal{L}(H)$ avec $\|P\| = 1$.

3) $P^2 = P$

4) P est auto-adjoint

5) $\forall x \in H$: $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ d'où $\langle Px, x \rangle \geq 0$.

6) $x \in M \Leftrightarrow \|Px\| = \|x\|$

7) $\langle Px, x \rangle \leq \|x\|^2$, $\forall x \in H$. (si $x = Px$ alors $\langle Px, x \rangle = \|x\|$)

V.5 Théorème

A op. auto-adj dans H, t.q. : $A^2 = A$
Alors : A est projecteur sur un s-e $M \subset H$.

Relations entre s-e en termes de projection

Théorème : P_1 et P_2 deux projections sur les s-e M_1 et M_2 resp.

$$(M_2 \subset M_1) \Leftrightarrow (P_1 P_2 = P_2) \Leftrightarrow (P_2 P_1 = P_2) \Leftrightarrow (\|P_2 x\| \leq \|P_1 x\|, \forall x \in H)$$
$$\Leftrightarrow (\langle P_2 x, x\rangle \leq \langle P_1 x, x\rangle \quad \forall x \in H)$$

projections orthogonales

V.7 Def : $P_1 \perp P_2$ si $P_1 P_2 = 0$.

V.8 Corollaire Si $P_1 \perp P_2$ on a de même $P_2 \perp P_1$.

V.9 Théorème : P_1 et P_2 deux proj sur M_1 et M_2 resp. $M_1 \perp M_2 \Leftrightarrow P_1 \perp P_2$

V.10. Théorème
P_i proj sur un s-e M_i $(i = 1, 2)$
Si P_1 et P_2 sont permutables, alors $P_1 P_2$ est une proj sur $M_1 \cap M_2$.

V.11. Théorème
$P_1, P_2, \dots, P_n$ des proj orth deux à deux si P_i est proj de H sur M_i
Alors $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ est proj de H sur la somme orth $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$

VI Théorèmes de Stampacchia et Lax Milgram

VI.1 Def : $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$.

i) $a(u,v)$ est continue si : $\exists\, C > 0$:
$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \, \|v\|$$

ii) $a(u,v)$ coercive si : $\exists\, \alpha > 0$:
$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2, \quad \forall v \in H$$

VI.2 Théorème de Stampacchia
H e. de Hilbert réel.
$a(u,v)$ continue et coercive. K cvxe fermé $K \subset H$, $K \neq \phi$.

C6.

Si $\varphi \in H'$ alors : $\exists!\ u \in K$ t.q. :

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

De plus, si la forme bilinéaire a est symétrique alors, u est caractérisé par :

$$u \in K$$
$$\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2} a \langle v, v \rangle - \langle \varphi, v \rangle \right)$$

VI.2 Corollaire. Lax-Milgram.

$a(u,v)$ forme bilinéaire continue et coercive alors : $\forall \varphi \in H'$, $\exists!\ u \in H$ t. que :

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

- De plus :

Si a symétrique $\overset{\text{alors}}{\Rightarrow} \begin{cases} u \in H \\ \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right). \end{cases}$