Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF-Mila
Institut de science et de technologie

Département de science et technique
Master II Electromécanique
Module Techniques de Commande Avancés **Année universitaire 2022/2023**

TD 02

Exercice 01 :

Soit le système suivant :

$\dot{x} = x^2 + u$

et soit le critère à minimiser :

$J = \int_0^1 (x^2 + u^2)dt$ avec $x(0) = 1$

1. Ecrire les expressions du critère et du Hamiltonien.
2. Ecrire le Hamiltonien pour ce problème de commande optimale.
3. Donner les conditions d'optimalités.
3. En déduire le système à résoudre.

Exercice 02

Considérons le système du deuxième ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

Et le critère à minimiser :

$$J = \frac{1}{2}\left(x_1^2(3) + 2x_2^2(3)\right) + \frac{1}{2}\int_0^3 \left(2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}u^2\right)dt$$

1. De quel problème de commande optimale s'agit-il ?
2. Donner la représentation d'état du système en déterminant les matrices A et B .
3. Donner la forme du critère pour ce problème.
4. On pose :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{21}(t) \\ P_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Déterminer les matrices Q et $P(3)$ et vérifier qu'elles sont définies positives.

5. Déterminer l'équation de Ricatti.
6. Déterminer le gain de commande.

Exercice 03

On considère le système

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

partant de $x_1 = 0$ à $t = 0$, on souhaite atteindre l'état $x_1 = 2$ à $t = 1$. Déterminer la commande optimale u qui minimise

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(3x_1^2 + u^2\right)dt$$

sous la contrainte du système et des conditions aux limites énoncées.

Exercice 04 :

On considère le problème de régulation pour le système du premier ordre suivant :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{a} > 0$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

1. Calculer la commande par retour d'état $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx}$ assurant au système bouclé un pôle de valeur -5.

2. a. Calculer la commande optimale $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx}$ minimisant le critère

$$\boldsymbol{J} = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{\rho u}^2)\, \boldsymbol{dt}, \qquad \boldsymbol{\rho} > 0.$$

2. b. Déterminer la valeur de ρ dans le critère assurant au système bouclé un pôle de valeur -5.

Exercice 05 :

Soit le système décrit par $\ddot{\boldsymbol{y}} - \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{u}$ et soit le fonctionnel $\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{u}^2)\boldsymbol{dt}$.
Trouver la commande optimale, $\boldsymbol{u}^*$, minimisant le fonctionnel $\boldsymbol{J}$.

Exercice 06 :

Soit le système décrit par la fonction de transfert : $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}) = \frac{2}{s+1}$ et soit le critère $\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{e}^2(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt}$ avec $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{d}}$ où $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{d}}$ constante et $\boldsymbol{\alpha}$ paramètre à régler.
1. Trouver la commande optimale pour ce système.
2. Trouver la FT du correcteur $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{U}(s)}{\boldsymbol{E}(s)}$ et quel est le type de ce correcteur.

Exercice 07

Un véhicule à essence est modélisé par les équations suivantes

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{u}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$$

avec pour les conditions initiales $x_1(0) = 0$ $x_2(0) = 1$. La commande u caractérise une vitesse, x_1 la distance parcourue et x_2 le niveau du réservoir de carburant. La deuxième équation modélise le fait que la consommation augmente en raison quadratique de la vitesse (intuitivement cette hypothèse est valide). Sur un horizon Sur un horizon $T = 1$, on souhaite parcourir la distance $x_1(T)$ la plus grande possible.

1. Calculer la commande optimale u^* maximisant la distance parcourue en utilisant la totalité du carburant disponible.

2. En déduire la distance maximale parcourue.