Chapitre 2
Minimisation sans contraintes

Mourad AZI

2021

Table of contents

Table of contents

Table of contents

Table of contents

Considérons le problème de minimisation (optimisation) non linéaire sans contraintes suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \qquad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Définition 2.1(Point minimum global)

x^* est appelée point minimum global du problème (1) si

$$f(x^*) \leq (x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

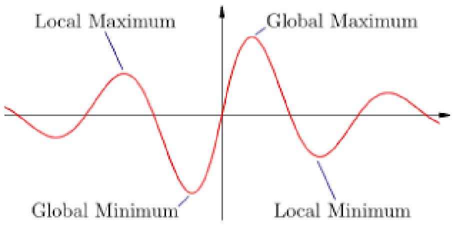
et on note $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*)$.

Définition 2.2(Point minimum local)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé minimum local du problème (1) s'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon),$$

où $B(x^*, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ est la boule de centre x^* et de rayon ε.



Théorème 2.1 (Existence "Weierstrass")

Soit f une fonction continue sur un ensemble S non vide fermé et borné, alors f admet un point minimum global et un point maximum global sur S, c'est-à-dire $\exists x_1^*, \ \ x_2^* \in S$ tel que :

$$\forall x \in S, \ \ f(x) \geq f(x_1^*), \ \ f(x) \leq f(x_2^*).$$

Définition 2.3 (Fonctions coercive)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non borné et $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est coercive sur X si on a

$$\lim_{x \in X, ||x|| \mapsto +\infty} f(x) = +\infty. \tag{2}$$

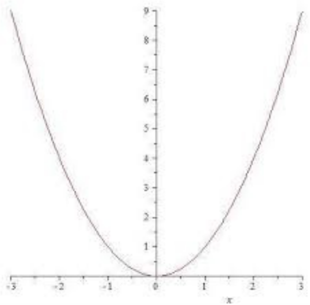
Théorème 2.2 (atteignement sous la coercivité)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ tel que f est coercive :

$$\lim_{||x|| \mapsto +\infty} f(x) = +\infty, \tag{3}$$

alors $\exists x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq f(x^*).$$


9
8
7
6
5
4
3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

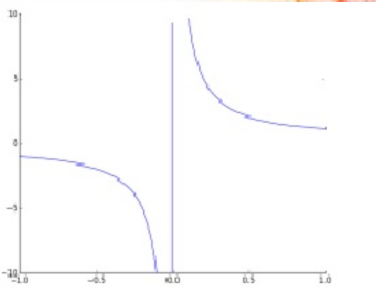

10
5
0
−5
−10
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

Table of contents

Condition nécessaire du premier ordre

Théorème 2.3(Condition nécessaire du premier ordre)

Soit x^* est un minimum local (global) pour le problème (1), et si de plus f est continûment différentiable sur un ensemble S-ouvert contenant x^*,

- alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{4}$$

Un point vérifiant la condition (4) est appelé point stationnaire.

Condition nécessaire du premier ordre

Théorème 2.3(Condition nécessaire du premier ordre)

Soit x^* est un minimum local (global) pour le problème (1), et si de plus f est continûment différentiable sur un ensemble S-ouvert contenant x^*,

- alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{4}$$

Un point vérifiant la condition (4) est appelé point stationnaire.

Conditions nécessaires

Condition nécessaire du premier ordre

Théorème 2.3(Condition nécessaire du premier ordre)

Soit x^* est un minimum local (global) pour le problème (1), et si de plus f est continûment différentiable sur un ensemble S-ouvert contenant x^*,

- alors

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{4}$$

Un point vérifiant la condition (4) est appelé point stationnaire.

Condition nécessaire du second ordre

Théorème 2.4(Condition nécessaire du second ordre)

Soit x^* un minimum local (global) pour le problème (1) de f sur $\mathbb{R}^n$ et si de plus f est deux fois continûment différentiable sur S-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, contenant x^*,

- alors

$$\nabla^2 f(x^*) \geq 0. \tag{5}$$

Condition nécessaire du second ordre

Théorème 2.4(Condition nécessaire du second ordre)

Soit x^* un minimum local (global) pour le problème (1) de f sur $\mathbb{R}^n$ et si de plus f est deux fois continûment différentiable sur S-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, contenant x^*,

- alors

$$\nabla^2 f(x^*) \geq 0. \tag{5}$$

Table of contents

Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable sur S-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, $f \subset C^2(S)$.
Supposons que pour $x^* \in S$ les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnarité) ;
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

Alors x^* est un minimum local.

Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable sur S-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, $f \subset C^2(S)$.
Supposons que pour $x^* \in S$ les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnarité) ;
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

Alors x^* est un minimum local.

Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment differentiable sur S-ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, $f \subset C^2(S)$.
Supposons que pour $x^* \in S$ les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnarité) ;
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

Alors x^* est un minimum local.

Théorème 2.6

Soit f une fonction réelle continûment différentiable, définie sur un ensemble convexe $X \in \mathbb{R}^n$. Alors f est convexe si et seulement si

$$f(x) - f(y) \geq (x - y)^T \nabla f(y), \forall x, y \in X. \tag{6}$$

Théorème 2.7 (L'ensemble des points minimums)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
L'ensemble M des points minimums de f est un ensemble convexe.

Théorème 2.8

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors tout point minimum local est global.

Théorème 2.9

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe, alors f atteint sa valeur minimale en un point unique.

Table of contents

Théorème 2.10

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continûment différentiable, alors f atteint sa valeur minimale en un point x^* si et seulement si

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{7}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*) \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0.$$