Table des matières

Chapitre 1

Séries de Fourier

1.1 Fonctions périodiques

Définition 1.1.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est périodique de période T (ou $T-$périodique), si et seulement si :*

$$f(x+T) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Corollaire 1.1.1. *Soit f une fonction $T-$périodique. On a alors les propriétés suivantes :*
1. Le nombre $-T$ est aussi une période de f.
2. Le nombre nT, $n \in \mathbb{Z}$ est aussi une période de f.

Démonstration. 1. Puisque f est une fonction $T-$périodique, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(x-T) &= f(x-T+T) \\ &= f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Si $n \geq 0$, par récurrence on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f(x+nT) &= f(x+(n-1)T+T) = f(x+(n-1)T) \\
&= \ldots \\
&\quad \ldots \\
&\quad \ldots \\
&= f(x+T) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $n < 0$. Puisque $-T$ est aussi une période de f, l'utilisation de la preuve précédente donne :

$$f(x+nT) = f(x+(-n)(-T)) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \qquad (1.4)$$

□

Proposition 1.1.1. *Soit f une fonction T-périodique, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ $(\alpha \neq 0)$ est $\dfrac{T}{\alpha}$-périodique.*

Démonstration. Puisque f est $T-$périodique, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
g\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) &= f\left[\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)+\beta\right] \\
&= f(\alpha x + \beta + T) = f(\alpha x + \beta) = g(x). \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.2. *Soit f une fonction T-périodique et intégrable sur un intervalle $[\lambda, \lambda+T]$ (intervalle de longueur T), alors on a :*

$$\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (1.6)$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(x)dx &= \int_{\lambda}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{\lambda+T} f(x)dx \\
&= \int_{\lambda}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{\lambda+T} f(x-T)dx \ \ (\text{car } -T \text{ est aussi une période de } f\,) \\
&= \int_{\lambda}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{\lambda} f(x)dx \ (\text{en posant } x - T = X) \\
&= \int_{0}^{T} f(x)dx, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

□

1.2 Séries trigonométriques

Définition 1.2.1. *Une série trigonométrique est une série de fonctions qui s'écrit sous la forme :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1.8}$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites de scalaires, réels ou complexes, $T = 2l$ est la période de la série.

Définition 1.2.2. *(Forme complexe d'une série trigonométrique) Puisque* $\sin 0 = 0$, *on peut supposer que $b_0 = 0$. Donc, si on pose :*

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{1.9}$$

l'expression (1.8) peut se réécrire sous la forme complexe :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{1.10}$$

Ainsi, une série trigonométrique peut être considérée comme une série de fonctions dans $\mathbb{C}$ de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)$.

1.2.1 Règles de convergences

Proposition 1.2.1. *1) Si les séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (1.8) est normalement (donc uniformément) convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*
2) Si les suites (a_n) et (a_n) sont positives, décroissantes et convergent vers 0, la série trigonométrique (1.8) converge simplement sur $\mathbb{R} - 2l\mathbb{Z}$ et uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \lambda, 2(k+1)\pi - \lambda]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \lambda < \pi$.

Démonstration. 1) On peut écrire :

$$\left|a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right| \leq |a_n| + b_n, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

La série trigonométrique (1.8) est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ par le critère de Weierstrass.
La continuité de la somme de cette série se déroule du fait que les fonctions $x \mapsto a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ sont continues et que la série (1.8) est uniformément convergente.
2) C'est une conséquence immédiate du critère d'Abel. □

1.2.2 Calcul de coefficients d'une série trigonométrique

Proposition 1.2.2. *Supposons que les séries numériques $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ sont absolument convergentes, et soit S la somme de la série trigonométrique (1.8). Alors les coefficients de cette série sont donnés par :*

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\ n \geq 0, \tag{1.12}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\ n \geq 1, \tag{1.13}$$

Démonstration. On multiplie le terme général de la série trigonométrique (1.8) par $\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ ou par $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ et en vertu des inégalités suivantes :

$$\left|\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right| \leq |a_n| + |b_n|,\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

$$\left|\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right| \leq |a_n| + |b_n|,\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{1.15}$$

on peut assurer la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\ \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \tag{1.16}$$

et

$$\sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \tag{1.17}$$

Par conséquent, on peut les intégrer terme à terme.
Les propriété (1.12) et (1.13) sont donc des conséquences du calcul suivant :

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = 0, \text{ pour tout } n \neq m, \tag{1.18}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = l, \tag{1.19}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = 0, \text{ pour tout } n, m \geq 1. \tag{1.20}$$

□

Nous pouvons maintenant définir la série de Fourier d'une fonction périodique.

1.3 Séries de Fourier

Définition 1.3.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $2l-$périodique et intégrable sur l'intervalle $[-l, l]$. On appelle série de Fourier de f et on note $SF(f)$ la série trigonométrique :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{1.21}$$

Les nombres a_n et b_n définis par :

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \; n \geq 0, \tag{1.22}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \; n \geq 1, \tag{1.23}$$

sont appelés coefficients de Fourier de f.

Corollaire 1.3.1. *Pour calculer les coefficients de Fourier d'une fonction, on peut calculer les intégrales sur tout intervalle du type $[\lambda, \lambda + 2l]$ au lieu de $[-l, l]$, et les coefficients de Fourier deviennent :*

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \; n \geq 0, \tag{1.24}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \; n \geq 1, \tag{1.25}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.1.2
. □

1.3.1 Séries de Fourier des fonctions paires ou impaires

Proposition 1.3.1. *1) Si f est paire sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier sont donnés par :*

$$\begin{cases} b_n = 0, \text{ pour tout } n \geq 1 \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \text{ pour tout } n \geq 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

2) Si f est impaire sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = 0, \text{ pour tout } n \geq 0, \\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases} \tag{1.27}$$

Démonstration. 1) Puisque f est paire, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\ &= \frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{l}\left[\int_{l}^{0} f(-x)\cos\left(-\frac{n\pi x}{l}\right)d(-x) + \int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{l}\left[\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx. \end{aligned}$$

D'autre part si f est paire sur $\mathbb{R}$, la fonction $f\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ est impaire pour tout

$n \geq 1$, et donc :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = -\frac{1}{l}\int_{l}^{-l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)d(-x) \\ &= -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)d(x) = -\frac{1}{l}b_n, \end{aligned}$$

Par conséquent $b_n = 0$, pour tout $n \geq 1$.

2) La démonstration est analogue pour le cas où f est impair. □

Exemple 1.3.1. *Considérons la fonction f 2π -périodique définie par :*

$$f(x) = x,\ x \in \left]-\pi, \pi\right[. \tag{1.28}$$

f est impaire, donc pour tout $n \geq 0$, $a_n = 0$, et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \text{pour tout } n \geq 1. \tag{1.29}$$

La série de Fourier de f est donc :

$$SF(f(x)) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx). \tag{1.30}$$

Exemple 1.3.2. *Considérons la fonction f 2π -périodique définie par :*

$$f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi]. \tag{1.31}$$

f est impaire, donc pour tout $n \geq 0$, $b_n = 0$, et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = 4\frac{\pi^2}{3},\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = 4\frac{(-1)^n}{n},\ \text{pour tout } n \geq 1. \tag{1.32}$$

La série de Fourier de f est donc :

$$SF(f(x)) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx). \tag{1.33}$$

1.3.2 Lemme de Riemann-Lebesgue (Condition nécessaire de convergence)

Lemme 1.3.1. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$, on a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)dx = 0. \tag{1.34}$$

Supposons que f est intégrable sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ par un nombre fini de points :$a = x_0 < x_1 <\cdots< x_n = b$ et une fonction escalier φ définie par $\varphi(x) = m_j$, $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right[$, $j = 1, 2, ..., n$, tels que :

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \text{ pour tout } \epsilon > 0. \tag{1.35}$$

On peut alors écrire :

$$\int_a^b \left|[f(x) - \varphi(x)]\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)\right| dx \leq \int_a^b \left|f(x) - \varphi(x)\right| < \epsilon, \text{ pour tout } \epsilon > 0. \tag{1.36}$$

Par coséquent :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \sum_{j=1}^{n}\lim_{n\to+\infty}\int_a^b m_j\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \sum_{j=1}^{n}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{m_j l}{n\pi}\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_a^b \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.37}$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $2l$−périodique et intégrable sur $[-l,l]$, alors les suites des coefficients de Fourier (a_n) et (a_n) convergent vers 0 quand $n \to +\infty$.*

1.3.3 Théorème de Dirichlet (Condition suffisante de convergence)

Dans cette partie, nous allons étudier un cas de convergence des séries de Fourier. Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 1.3.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est continue par morceau sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $\left\{\left[x_{j-1}, x_j\right[,\ j = 1, 2, ..., n\right\}$ de $[a, b]$ tel que :*
1. f continue sur chaque intervalle $\left[x_{j-1}, x_j\right[$, $j = 1, 2, ..., n$.
2. f admet des discontinuités de première espèce aux point x_j, $j = 1, 2, ..., n$.

On rappelle que f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0, lorsqu'elle admet en ce point une limite à droite $f(x_0^+)$ et une limite à gauche $f(x_0^-)$ telle que $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$.

Définition 1.3.3. *On dit que f est de classe C^1 par morceau sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $\left\{\left[x_{j-1}, x_j\right[,\ j = 1, 2, ..., n\right\}$ de $[a, b]$ tel que :*
1. f est de clsse C^1 sur chaque intervalle $\left[x_{j-1}, x_j\right[$, $j = 1, 2, ..., n$.
2. f admet des dérivées à droite et des dérivées à gauche aux point x_j, $j = 1, 2, ..., n$ qui sont distincts..

Définition 1.3.4. *(Noyau de Dirichlet) On appelle noyau de Dirichlet la fonction D_n définie par :*

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}, & si\ x \neq 2ml,\ m \in \mathbb{Z} \\ n + \dfrac{1}{2}, & si\ x = 2ml,\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.38}$$

Proposition 1.3.2. *Le noyau de Dirichlet D_n a des propriétés suivantes :*
1. D_n est une fonction paire et périodique de période $2l$.
2. D_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. D_n peut se représenter par la formule :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{k\pi x}{l}),\ pour\ tout\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.39}$$

et de plus :

$$\frac{1}{l}\int_0^l D_n(x)dx = \frac{1}{2}. \tag{1.40}$$

Démonstration. 1. D_n est une fonction paire (évident).

D'autre part, pour tout $x \neq 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} D_n(x+2l) &= \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} + (2n+1)\pi\right]}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}+\pi\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \\ &= D_n(x). \end{aligned} \tag{1.41}$$

La fonction D_n est donc $2l$ -périodique.

2. Il suffit de démontrer que D_n est continue au oint $x_0 = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} D_n(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}} \times \frac{\frac{\pi x}{2l}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \times \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}}{2\times\frac{\pi x}{2l}} \\ &= n+\frac{1}{2} = D_n(0). \end{aligned}$$

La fonction D_n est donc continue au point $x_0 = 0$. Par périodicité de la fonction D_n, on en déduit alors que D_n est continue en tout point $x = 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$. Par conséquent D_n est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Pour tout $x \neq 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$
\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\frac{\pi x}{l}) = \frac{1}{2} + \Re\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(ik\frac{\pi x}{l})\right) \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{1-\exp(in\frac{\pi x}{l})}{1-\exp(i\frac{\pi x}{l})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{1-\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{1-\cos(\frac{\pi x}{l}) - i\sin(\frac{\pi x}{l})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{2\sin^2(\frac{n\pi x}{2l}) - 2i\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - 2i\cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp\left(i\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)\left(\frac{\sin(\frac{n\pi x}{2l})}{\sin(\frac{n\pi x}{2l})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}\right] \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} = D_n(x). \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

Si $x = 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2km\pi) = \frac{1}{2} + n. \qquad (1.43)$$

De plus, on a :

$$\frac{1}{l}\int_0^l D_n(x)dx = \frac{1}{2l}\int_0^l dx + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_0^l \cos(\frac{k\pi x}{l})dx = \frac{1}{2}. \qquad (1.44)$$

□

Voici maintenant le théorème de Dirichlet :

Théorème 1.3.1. *(théorème de Dirichlet) Soit f une fonction $2l-$périodique et de classe C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement en tout point x de $\mathbb{R} - 2l\mathbb{Z}$ et a pour somme :*

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \tag{1.45}$$

De plus si f est continue, la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et $S(x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles de la série de Fourier :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}). \tag{1.46}$$

Soit x un poit de $\mathbb{R}$ quelconque. Il suffit de démontrer

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \tag{1.47}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)dt\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{n\pi\,(t-x)}{l}\right)\right)dt\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n\,(t-x)\,dt\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+y)D_n\,(y)\,dy \ \ (\text{ en utilisant le changement } y=t-x)\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+y)D_n\,(y)\,dy \ \ (\text{d'après la proposition 1.1.2})\\
&= \frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{0} f(x+y)D_n\,(y)\,dy+\int_{0}^{l} f(x+y)D_n\,(y)\,dy\right)\\
&= \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\left(f(x-y)+f(x+y)\right)D_n\,(y)\,dy \ (\text{en faisant le changement } u\mapsto -u\text{ }).
\end{aligned}\tag{1.48}$$

L'utilisation des formules $\frac{1}{l}\int_0^l D_n(y)dy = \frac{1}{l}\int_0^l\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\right)dy = \frac{1}{2},$

nous donne :

$$\begin{aligned}
S_n(x)-\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{l}\int_0^l\left(f(x-y)+f(x+y)\right)\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\right)dy+\\
&\quad -\left(\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2l}\right)\int_0^l\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\right)dy.\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^l\frac{f(x-y)-f(x^-)}{y}\times\frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\times\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)dy+\\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^l\frac{f(x+y)-f(x^+)}{y}\times\frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\times\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)dy.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est de classe C^1 par morceau et $\lim \dfrac{\frac{\pi y}{2l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)} = 1$, les fonctions :

$$y \mapsto \frac{f(x-y)-f(x^-)}{y} \times \frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)} \text{ et } y \mapsto \frac{f(x+y)-f(x^+)}{y} \times \frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}, \tag{1.49}$$

sont bornées.

Le résultat est donc une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue. □

1.3.4 Formule de Parseval

Théorème 1.3.2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $2l$, intégrable sur $[-l, l]$ et soit*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right), \tag{1.50}$$

la série de Fourier de f. Alors la formule de Parseval est donnée par :

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right). \tag{1.51}$$

Démonstration. On fait la démonstration de ce théorème lorsque

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right), \tag{1.52}$$

Supposons alors que les séries numériques $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ sont absolument convergentes, et soit (S_n) la suite des sommes partielle de la série de Fourier telle que

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right). \tag{1.53}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|f(x) - S_n(x)\right| \leq \sum_{k\geq n+1} |a_k + b_k|, \tag{1.54}$$

quantité tendant vers 0, quand $n \to +\infty$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\left|f^2(x) - S_n^2(x)\right| &= \left|f(x) - S_n(x)\right| \left|f(x) + S_n(x)\right| \\
&\leq \left|f(x) - S_n(x)\right| \times 2 \left|f(x)\right| \\
&\leq 2 \sum_{k \geq n+1} |a_k + b_k| \left(\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{k \geq 1} |a_k + b_k| \right) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

La suite de fonction S_n^2 est donc uniformément convergente vers f^2.
Cette convergence uniforme nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} S_n^2(x)dx \right). \tag{1.56}$$

En utilisant les propriétés (1.18), (1.19), (1.20) et le fait que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + 2 \sum_{i,j=1_{i \neq j}}^{n} \alpha_i \alpha_j, \tag{1.57}$$

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \frac{a_0^2}{4} dx = \frac{a_0^2}{2}, \tag{1.58}$$

on en déduit bien que

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} S_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right), \tag{1.59}$$

En faisant n tendre vers $+\infty$, l'expression (1.56), devient

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right). \tag{1.60}$$

□

Remarque 1.1. *Le théorème de Parseval précédent reste vrai même si f n'est pas la somme de sa série de Fourier.*

1.4 Quelques applications des séries de Fourier

L'utilisation de la continuité de la somme de la série de Fourier sur certains intervalle et le théorème de Parseval nous donne de nouvelles identités remarquables :

En effet, dans l'exemple 1.3.1, la série de Fourier de x est donnée par :

$$SF(x) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx). \tag{1.61}$$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ est un point de continuité, on a alors $\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, d'où

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \tag{1.62}$$

D'autre part, l'utilisation du théorème de Parseval, nous donne

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}. \tag{1.63}$$

Donc :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.64}$$

De même, dans l'exemple 1.3.1, la série de Fourier de x^2 est donnée par :

$$SF(x^2) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx). \tag{1.65}$$

$x_0 = 0$ est un point de continuité, on a alors $0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, d'où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \tag{1.66}$$

D'autre part, l'utilisation du théorème de Parseval, nous donne :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5}\pi^4 = \left(\frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}\right), \tag{1.67}$$

d'où :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{1.68}$$