# Table des matières

# Chapitre 1

# *Fonctions dérivables*

## 1.1 *Définitions et propriétés*

### 1.1.1 *Dérives d'une fonction en un point*

**Définition 1.1.1** *:*

*Soit* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$ *et* $f$ *une fonction définie de* $I$ *dans* $\mathbb{R}$, *dit que* $f$ *est* ***dérivable*** *au point* $x_0$ *si la limite* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et finit.*

*Cette limite qu'est alors unique appelé dérivée de* $f$ *au point* $x_0$ *et notée* $f'(x_0)$.

***Exemple 1.1.1*** *:*

**1)** *Si* $f$ *est constante* $(f = cst)$, $f$ *est dérivable au tout point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et on a* $f'(x_0) = 0$.

**2)** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, $f$ *est dérivable au tout point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et on a* $f'(x_0) = 1$.

**3)** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n$, $f$ *est dérivable au tout point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et on a* $f'(x) = nx^{n-1}$.

**4)** $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$, $f$ *est dérivable au tout point* $x_0 \in \mathbb{R}_+$ *et on a* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

**5)** $f(x) = \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = \cos x$.

**6)** $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

*la limite n'existe pas* $\Longrightarrow f$ *n'est pas dérivable au point* $x_0=0$.

***Remarque 1.1.1*** *: On a:* $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

*Ainsi, en posant* $x=x_0+h, h\neq 0$; *si* $x\longrightarrow x_0\Longrightarrow h\longrightarrow 0$

*on a:* $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

***Exemple 1.1.2*** *:*

$f(x)=x^2+2$

*Montrer que* $f$ *est dérivable au point* $x_0=1$

$1^{Méth}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2-3}{x-1} &&= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} &&= \lim_{x\to 1}(x+1)=2\end{aligned}$$

*donc* $f$ *dérivable au point* $x_0=1$ *et* $f'(1)=2$.

$2^{Méth}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+2-3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h++h^2-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}2+h=2\end{aligned}$$

*donc* $f$ *dérivable au point* $x_0=1$ *et* $f'(1)=2$.

### 1.1.2 *Différentielle*

**Définition 1.1.2** *:*

*Une fonction définie dans un voisinage* $V$ *de* $x_0$ *est dite différentielle en* $x_0$ *s'il existe un nombre* $X$ *et une fonction* $\varepsilon$ *définie pour* $h\neq 0$ *tel que:*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h.X+h\varepsilon(h)\quad \textit{avec}\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

**Théorème 1.1.1** *:*

*Une fonction* $f$ *est différentiable en un point* $x_0$ *si et seulement si* $f$ *est dérivable en* $x_0$.

### 1.1.3 *Dérivée à droite et dérivée à gauche*

**Définition 1.1.3** *:*

*Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.

**1)** *On dit que* $f$ *est dérivable à droite au point* $x_0$ *si* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et finit.*

*Cette limite est appelée dérivée à droite au point* $x_0$ *et note* $f'_d(x_0)$ *ou* $f'(x_0 + 0)$.

**2)** *On dit que* $f$ *est dérivable à gauche au point* $x_0$ *si* $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et finit.*

*Cette limite est appelée dérivée à gauche au point* $x_0$ *et note* $f'_g(x_0)$ *ou* $f'(x_0 - 0)$.

**3)** *On dit que* $f$ *est dérivable au point* $x_0$ *si* $f$ *est dérivable à droite et à gauche et* $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

***i.e***: $f$ *dérivable au point* $x_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ f'_d(x_0) \text{ existe et finit} \\ 2)\ f'_g(x_0) \text{ existe et finit} \\ 3)\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$

**Remarque 1.1.2** *:*

*Si* $f'_d(x_0)$ *et* $f'_g(x_0)$ *existent mais* $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ *alors* $f$ *n'est pas dérivable au point* $x_0$ *et le point* $(x_0, f(x_0))$ *est un point anguleux.*

***Exemple 1.1.3*** *:*

**1)** $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-x - 0}{x} = -1.$$

*donc* $f$ *n'est pas dérivable au point* $0$ *et le point* $(0, 0)$ *est un point anguleux.*

**2)** $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

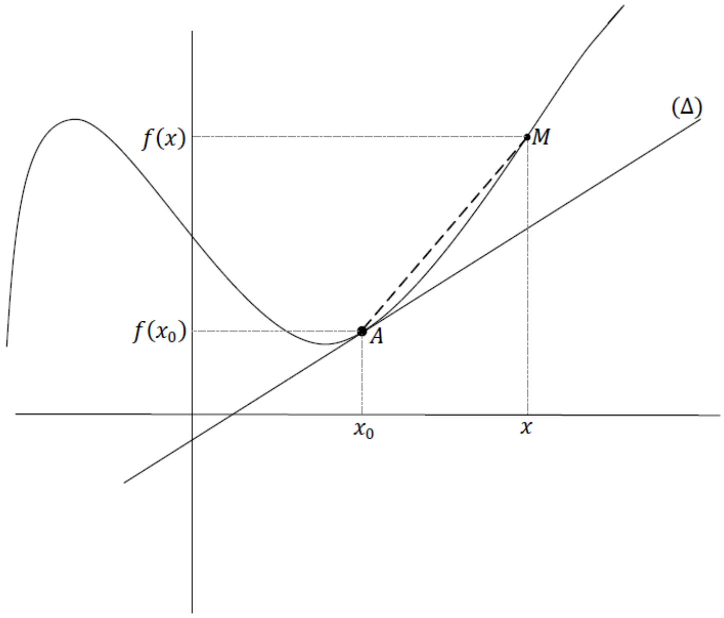
*donc* $f$ *n'est pas dérivable au point* $x_0 = 0$.

### 1.1.4 *Interprétation géométrique de dérivabilité en un point*

*Soient* $A(x_0, f(x_0))$ *et* $M(x, f(x))$ *sur la courbe représentative* $\Gamma$ *de* $f$. *Le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est le coefficient directeur de la corde* $AM$.

*Dire que* $f$ *est dérivable en* $x_0$ *c'est-à-dire que la corde* $AM$ *possède une position limitée non verticale* $(\Delta)$, *de coefficient directeur* $f'(x_0)$ *quand* $x$ *tend vers* $x_0$, *c'est-à-dire quand* $M$ *tend vers* $A$ *sur* $\Gamma$ *en son point d'abscisse* $x_0$.

*Dire que* $f$ *est dérivable en* $x_0$ *c'est donc dire que la courbe représentative* $\Gamma$ *de* $f$ *présente au point* $A(x_0, f(x_0))$ *une tangente* $\Delta$ *non vertical. L'équation de* $(\Delta)$ *est* $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$.




**Remarque 1.1.3** *:*

**1)** *Le rapport* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est appelé le taux d'accroissant de la fonction* $f$ *au voisinage de* $x_0$

*Si on pose* $x = x_0 + h$, $h \neq 0$ *alors:*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

*on peut aussi écrire:*

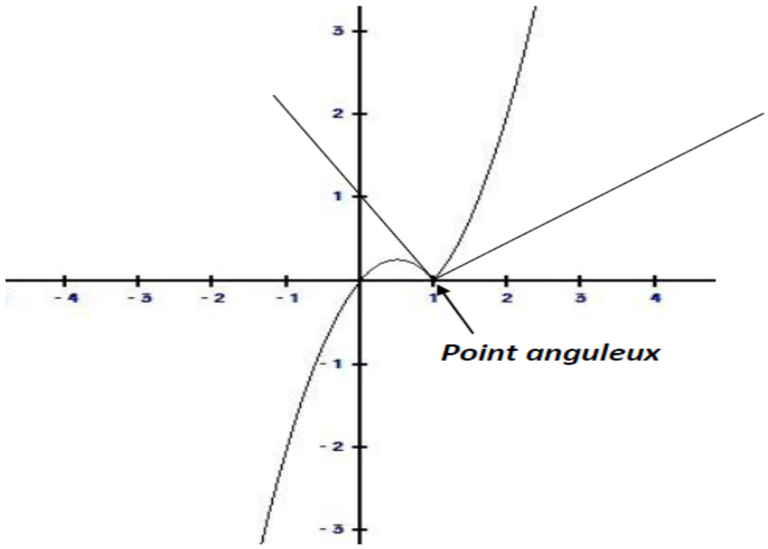
$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

**2)** *Si la fonction $f$ est dérivable à droite (resp à gauche), on parle de demi tangente.*

***Exemple 1.1.4*** *:*

$f(x) = x|x-1|$ *en* $x_0 = 1$

*on a:* $f'_d(1) = 1$ *et* $f'_g(1) = -1$.




### 1.1.5 *Dérivable et continuité*

**Proposition 1.1.1** *:*

*Si $f$ est dérivable au point $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

***Remarque 1.1.4*** *:*

**1)** *La réciproque de cette proposition est fausse.*

***i.e:*** *une fonction peut être continue en un point $x_0$ sans être dérivable.*

***Exemple 1.1.5*** *:*

$f(x) = \sqrt{|x|}$, *en* $x_0 = 0$

$f$ *est continue en* $x_0 = 0$ *mais elle n'est pas dérivable en* $x_0 = 0$.

**2)** *Si* $f$ *n'est pas continue en* $x_0$, *alors* $f$ *n'est pas dérivable en* $x_0$.

### 1.1.6 *Dérivée sur un intervalle*

**Définition 1.1.4** *:*

*Une fonction définie sur un intervalle* $I$ *est dite dérivable sur* $I$ *si elle est dérivable en tout point* $x_0$ *de* $I$.

*L'application* $x \longrightarrow f'(x)$ *est appelé fonction dérivée ou tout simplement dérivée de* $f$ *est notée* $f', Df, \dfrac{df}{dx}$.

### 1.1.7 *Dérivées d'ordre supérieur*

**Définition 1.1.5** *:*

*Soit* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On définit la dérivée n-ième a dérivé d'ordre* $n$ *de* $f$ *par récurrence comme suite:*

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = f(x) \\ f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

*On utilise aussi les notations* $D^{(n)}f, \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

***Exemple 1.1.6*** *:*

$$f(x) = \sin x$$
$$f^{(0)}(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f^{(3)}(x) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$

$\vdots$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$

*on montre par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}, (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$

### 1.1.8 *Fonction de classe* $C^n$

*Soit* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*, on dit que* $f$ *défini sur un intervalle* $I$ *est de classe* $C^n$ *ou* $n$ *fois continument dérivable si elle* $n$ *fois dérivable et si* $f^{(n)}$ *est continue sur* $I$.

**i.e:** ($f$ est de classe $C^n$) $\Longrightarrow f', f'', f''', ....., f^{(n)}$ existent et $f^{(n)}$ *est continue sur* $I$.

- *Une fonction est dite de classe* $C^0$ *si* $f$ *est continue.*
- *Une fonction est dite de classe* $C^\infty$ *si elle est indéfiniment dérivable sur* $I$.
- *L'ensemble des fonctions de classe* $C^n$ *sur* $I$ *est noté* $C^n(I)$.

## 1.2 *Opérations sur les fonctions dérivables*

**Théorème 1.2.1** *:*

*Soit* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$*, si* $f$ *et* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont dérivable en* $x_0$*. Alors*

**1)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f$ *est dérivable en* $x_0$ *et on a:* $(\alpha f)' = \alpha f'$.

**2)** $f + g$ *est dérivable en* $x_0$ *et on a:* $(f+g)' = f' + g'$.

**3)** $f \times g$ *est dérivable en* $x_0$ *et on a:* $(f \times g)' = f'g + fg'$.

**4)** *Si* $g(x_0) \neq 0, \frac{f}{g}$ *est dérivable en* $x_0$ *et on a:* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

## 1.3 *Dérivée* $n$*-iéme d'un produit (formule Leibniz)*

*Si* $f$ *et* $g$ *admettent des dérivées* $n$*-ièmes au point* $x_0$ *et on a:*

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \quad \text{où } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

**Exemple 1.3.1** *:*

$h(x) = e^{ax}.e^{bx}$

*on pose* $f(x) = e^{ax}$ *et* $g(x) = e^{bx}$

*on a:* $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ *et* $g^{(n)}(x) = b^n e^{bx}$.

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \left(e^{ax}.e^{bx}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{ax}\right)^{(n-k)} \left(e^{bx}\right)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} e^{ax} b^k e^{bx} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k e^{(a+b)x}. \end{aligned}$$

## 1.4 Dérivée d'une fonction composée

**Théorème 1.4.1** *:*

*Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *où* $f(I) \subset J$ *et* $x_0 \in I$. *Si* $f$ *est dérivable en* $x_0$ *et* $g$ *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* $x_0$ *et on a:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

## 1.5 *Dérivée d'une fonction réciproque*

**Proposition 1.5.1** *:*

*Soient* $f : I \longrightarrow J$ *une fonction bijective et continue sur* $I$ *et dérivable en* $x_0 \in I$ *tel que* $f'(x) \neq 0$. *Alors la fonction réciproque* $f^{-1}$ *est dérivable au point* $f(x_0)$ *et on a:*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

***Exemple 1.5.1*** *:*

$f(x) = \ln x, \quad x_0 = e.$

$f$ *est dérivable au point* $x_0 = e$, *et* $\left(f^{-1}\right)'(f(e)) = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{1}{\frac{1}{e}} = e.$

## 1.6 *Maximum, Minimum (extremum)*

**Définition 1.6.1** *:*

*Soit $f$ une fonction définie de $I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que $f$ admet dans $I$ un maximum relatif ou local (resp minimum relatif ou local) au point $x_0$, s'il existe un intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset I$ telle que $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,, f(x) \leq f(x_0)\,(resp\ f(x) \geq f(x_0))$.*

*Dans ce cas, la valeur $f(x_0)$ est dite maximale (resp minimale) de $f$.*

*On dit que $f$ admet un extremum en $x_0$ si $f$ admet en $x_0$ un maximum ou un minimum local.*

**Théorème 1.6.1** *:*

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ si $f$ admet un extremum local au point $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.*

***Conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum:***

- *Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$ alors $f$ admet un extremum en $x_0$ (maximum si $f''(x_0) < 0$ et minimum si $f''(x_0) > 0$).*
- *Si $x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$ alors $x_0$ est dit point critique de la fonction $f$.*

**Exemple 1.6.1** *:*

$f(x) = x^2, f'(x) = 2x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ *est un point critique pour $f$.*

$f''(x) = 2 \neq 0$ *alors $f$ admet un extremum minimum car $f''(x_0) > 0$.*

***Généralisation:*** *Soit $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, ........., f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

- *Si $n$ est pair alors $f$ admet un extremum au point $x_0$.*
- *Si $n$ est impair alors $f$ n'admet pas un extremum au point $x_0$.*

**Exemple 1.6.2** *:*

**1)** $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$ *est un point critique*

$f''(x) = 12x^2 \Longrightarrow f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = 24x \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24 \neq 0$

$n = 4 \Longrightarrow f$ *admet un extremum au point* $x_0 = 0$ *minimum car* $f^{(4)}(0) = 24 > 0.$

**2)** $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ *est un point critique*

$f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$

$n = 3$ *alors* $f$ *n'admet pas un extremum au point* $x_0 = 0.$

## 1.7 *Théorème de Rolle*

**Théorème 1.7.1** *:*

*Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction vérifie:*

1) $f$ *continue sur* $[a, b]$

2) $f$ *dérivable sur* $]a, b[$

3) $f(a) = f(b)$

*Alors il existe au moins* $c \in \,]a, b[$ *tel que:* $f'(c) = 0.$

***Remarque 1.7.1*** *:*

*Les conditions du théorème ne sont pas nécessaires.*

***Exemple 1.7.1*** *:*

$f(x) = x^3$ *sur* $[-1, 1]$

$f(x)$ *ne satisfait pas toutes les conditions sur* $[-1, 1]\,(f(1) \neq f(-1))$ *, mais*

$\exists c = 0 \in \,]-1, 1[\,, f(0) = 0.$

## 1.8 Théorème des accroissements finis

**Théorème 1.8.1** *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction qui vérifie:*

1) $f$ *continue sur* $[a, b]$

2) $f$ *dérivable sur* $]a, b[$

*Alors il existe au moins un point* $c \in\ ]a, b[$ *tel que:* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

***Remarque 1.8.1*** *:*

*Le théorème des accroissements finis est un corollaire de théorème de Rolle.*

***Preuve.*** *Posons* $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

*Soit* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = f(x) - f(a) - A(x - a)$$

*On a: g vérifie:*

1) $g$ *est continue sur* $[a, b]$ *car* $f$ *est continue sur* $[a, b]$.

2) $g$ *dérivable sur* $]a, b[$ *car* $f$ *est dérivable sur* $]a, b[$.

3) $g(a) = 0$ *et* $g(b) = 0$.

*donc g vérifie les conditions du théorème de Rolle alors*

$$\exists c \in\ ]a, b[\,, g'(c) = 0 \Longrightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

***Corollaire 1.8.1*** *:*

*Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $I$, *alors pour tous points distincts* $x_1, x_2 \in I$ *on a: il existe un point c strictement compris entre* $]x_1, x_2[$ *tel que*

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

***i.e:*** $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2, \exists c \in\ ]x_1, x_2[ : f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

***Remarque 1.8.2*** *:*

**1)** *Il est facile de voir que tout point c strictement compris entre* $x_1$ *et* $x_2$ *c'écrit de façon unique sous la forme* $c \in \left]x_1, x_2\right[, x_1 < c < x_2$ *et* $c = x_1 + \theta (x_2 - x_1)$ *où* $0 < \theta < 1$.

avec cette notation la formule des accroissements finis peut s'écrire

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta (x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

ou sous la forme suivante:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \quad \text{où } 0 < \theta < 1.$$

**2)** Les propositions suivantes sont des conséquences simples de la formule des accroissements finis. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

**1)** $\forall x \in I, f'(x) = 0 \Longrightarrow f$ est constante.

**2)** Si $f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f$ est croissante sur $I$.

**3)** Si $f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f$ est décroissante sur $I$.

**4)** Si $f'(x) > 0$ (resp $f'(x) < 0$) $\Longrightarrow f$ est strictement croissante (resp strictement décroissante).

**5)** Si $f$ dérivable sur $I$ et $f'(x) \neq 0$ alors $f$ est strictement monotone $\forall x \in I$.

## 1.9 *Théorème des accroissements finis généralisée*

**Théorème 1.9.1** *:*

*Soit* $f$ *et* $g$ *deux fonctions continues sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Alors il existe un point* $c$ *dans* $]a, b[$ *tel que* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

## 1.10 *Théorème de l'Hopital*

Si $f$ et $g$ deux fonctions dérivables dans un voisinage de $x_0$ alors:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

**Remarque 1.10.1** *:*

**1)** *La réciproque est inexacte*

***Exemple 1.10.1*** *:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 . \sin \dfrac{1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 \;\; si \;\; x \neq 0 \end{cases} \qquad ; \qquad g(x) = \sin x, \;\; x_0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 . \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = - \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} \;\; \textit{la limite n'existe pas.}$$

**2)** *Ce résultat s'applique aux formes indéterminées* $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

## 1.11 Fonctions convexes

**Définition 1.11.1** *: (fonction convexe)*

*Une fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite convexe si:*

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0,1] \, ; f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

**Exemples et remarques:**

**1)** Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $(-f)$ est convexe.

**2)** La fonction $x \longrightarrow |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $|\lambda a + (1-\lambda) b| \leq \lambda |a| + (1-\lambda) |b|$.

**3)** Les fonctions affines $f : x \longrightarrow \alpha x + \beta$ sont à Ia fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$, car elles vérifient en effet $f(\lambda a + (1-\lambda) b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$. Réciproquement si une fonction est à la fois convexe et concave alors elle est affine.

**4)** Soient $f_1, f_2, ......., f_n$ des fonctions convexes, et $\alpha_1, \alpha_2, ......., \alpha_n \in \mathbb{R}_+$. Alors la fonction $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ........ + \alpha_n f_n$ est convexe.

**Définition 1.11.2** *: (partie convexe du plan)*

*Soit $\Omega$ une partie non vide du plan $\mathbb{R}^2$. On dit que $\Omega$ est une partie convexe si, pour tous points $M, N$ de $\Omega$, le segment $[M, N]$ est inclus dans $\Omega$.*

**Proposition 1.11.1** *: (caractérisation par la convexité de l'épigraphe)*

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. L'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$ est appelé épigraphe de $f$ sur $I$.*

*La fonction $f$ est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

**Remarque 1.11.1** *: $f$ est concave sur $I \iff$ la partie située sous la courbe $y = f(x)$ est convexe.*

**Proposition 1.11.2** *:*

*Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si:*
*pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$.*

**Proposition 1.11.3** *: Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors:*

* $f$ dérivable à gauche et à droite (donc continue) et $f'_g \leq f'_d$ .

* Les fonctions $f'_g, f'_d$ sont croissantes.

**Proposition 1.11.4** *:*

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $f$ est continue en tout point intérieur de $I$.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f$ est convexe $\iff$ $f'$ est croissante sur $I$.

- Soit $f$ une fonction deux fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f$ est convexe $\iff$ $f'' \geq 0$ pour tout $x \in I$.

**Proposition 1.11.5** *: (Les fonctions concaves)*

- Une fonction concave sur $I$ est continue en tous les points intérieurs à $I$.

- Si $f$ est dérivable et concave $\iff$ $f$ est décroissante.

**Inégalités de convexité**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $x_1, x_2, ......., x_n \in I$, pour tout $\lambda_k \in [0, 1]$ ; $k = 1, ....n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors on a l'inégalité $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.