**Chapitre II : Classification des équations aux dérivées partielles.**

**II.1Définition :**

\* Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation faisant intervenir les variables

Indépendantes$ x\_{1}$,$ x\_{2}$ … … … … . $x\_{1n}$, la fonction 𝑓 et ses dérivées partielles.

Par exemple, si 𝑓 est une fonction de deux variables, une EDP peut s’écrire par la relation :

F$\left(x,y,\frac{∂f}{∂x},\frac{∂f}{∂y},\frac{∂^{2}f}{∂x^{2}},\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}},\frac{∂^{2}f}{∂x∂y},\frac{∂^{2}f}{∂y∂x},\frac{∂^{3}f}{∂x^{3}},\frac{∂^{3}f}{∂y^{3}},\frac{∂^{3}f}{∂x∂y^{2}},\frac{∂^{3}f}{∂x^{2}∂y},..\right)……\left(II.1\right)$

\* On appelle ordre de l’EDP l’ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l’EDP, par exemple :

$\frac{∂^{3}f}{∂X^{2}∂y } $+$ 3\frac{∂^{2}f}{∂x^{2}}+x\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}} $+$ \frac{∂f}{∂x} $+$ f+C=0 est d’ordre 3………..…\left(II.2\right)$

$\left(\frac{∂^{2}f}{∂X^{2}}-\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}}\right)^{2}+\left(\frac{∂^{2}f}{∂x∂y}\right)^{2}-c=0$ Est d’ordre 2$……………………\left(II.3\right)$

L’EDP est dite linéaire si 𝐹 est linéaire par rapport à ses arguments 𝑓 et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (𝑥, 𝑦) ; sinon elle est non linéaire. Par exemple, l’EDP du second ordre :

$a\_{1}\frac{∂^{2}f}{∂X^{2}}$ +$ a\_{2}\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}}+a\_{3}\frac{∂^{2}f}{∂x∂y} $+$ a\_{4}\frac{∂f}{∂x} $+$ a\_{5}\frac{∂f}{∂y}+a\_{6}f+a\_{7}=0……….$…$\left(II.4\right)$

Est linéaire si les 𝑎i ne dépendent que de (𝑥, 𝑦).

**II.2. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :**

$A\frac{∂^{2}Φ}{∂X^{2}} $+$ B\frac{∂^{2}Φ}{∂xy}+C\frac{∂^{2}Φ}{∂^{2}z} $+ D$\frac{∂Φ}{∂x} $+$ E\frac{∂^{2}Φ}{∂y}+EΦ+G\left(x,y\right)=0………\left(II.5\right)$

Généralement les équations ou drivées partielles sont classe on trois catégories appelles : elliptique, parabolique, hyperbolique.

pour illustrer cette classification nous considérons l’équation au drivers partielles du deuxième ordre au deux variable indépendant x,y donner Forsyth 1967

ici nous suppose une équation linéaire qui est A, B, C, D, E et F sont fonction de (x,y),mais ne dépend pas de la variable 𝞥

La varible 𝞥 = Température, pression, densité ou vitesse.

L’équation de (1) dépend de A, B, C, D, E, F.

l’équation au driver partielle de (1) un point (x,y) est appel :

Lorsque la quantité Δ=(b2 -4ac) $<0 $l’équation (2) est dite du type elliptique.

\* Lorsque la quantité Δ=(b2 -4ac)=0 l’équation (2) est dite du type parabolique.

\* Lorsque la quantité Δ=(b2 -4ac) $>$0 l’équation (2) est dite du type hyperbolique

Cette classification est purement mathématique, une particularité des équations de type elliptique c’est qu’elles nécessitent des conditions aux limites à toutes les frontières du domaine d’étude.

**Exemple**

L’équation de la conductivité thermique sans génération de chaleur et avec des propriétés constante dans le cas bidimensionnelle (2D)

**Exemples :** soient (𝑥, 𝑦) une fonction de deux variables et (𝑥, 𝑦, 𝑡) une fonction de trois variables.

$\frac{∂^{2}T}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}T}{∂y^{2}}$=0 est une EDP elliptique

$\frac{∂^{2}g}{∂t^{2}}=\frac{∂^{2}g}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}g}{∂y^{2}} $Est une EDP hyperbolique

$\frac{∂g}{∂t}=\frac{∂^{2}g}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}g}{∂y^{2}}$ Est une EDP parabolique

$x\frac{∂^{2}f}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}}=0$ Elliptique pour x$ >$ 0

 Hyperbolique x$ <$ 0

 Parabolique x$ =$ 0

**II.4.1.‐ Equation de la chaleur :**

La conduction thermique à l’intérieur d’un domaine D bidimensionnel provoque un changement de la température (𝑡, 𝑥, 𝑦), qui régi, en l’absence de source de chaleur par l’EDP :

$ρc\frac{∂T}{∂t}=\frac{∂}{∂x}\left(k\frac{∂T}{∂x}\right)+\frac{∂}{∂y}\left(\frac{∂T}{∂x}\right)……………………………………………………\left(II.7\right)$

Où 𝑘, 𝜌, 𝑐 sont respectivement la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur spécifique du solide constituant le domaine D.

Lorsque k dépend seulement de la position (𝑥, 𝑦), l’EDP est linéaire ; si k dépend de la température T, l’EDP est non linéaire.

Dans la majorité des cas rencontrés, on considère k comme constante et l’équation de la chaleur peut être sous la forme :

$\frac{∂T}{∂x}=\frac{k}{ρc}\left(\frac{∂^{2}T}{∂X^{2}}+\frac{∂^{2}T}{∂Y^{2}}\right)$=α $∆T……………………………………………\left(II.8\right)$

$∆T=\frac{∂^{2}T}{∂X^{2}} $+$ \frac{∂^{2}T}{ ∂Y^{2}}$ désigne le laplacien de T

α =$ \frac{k}{ρc}$ est le coefficient de T

De manière générale, si T dépend de n variables d’espace ($x\_{1}$, … . . $x\_{n}$) on a :

$\frac{∂T}{∂t} $= α$\sum\_{i=1}^{i=n }\frac{∂^{2}T}{∂x\_{i}^{2}}$

Tous les problèmes de diffusion sont régis par ce type d’équations.

**Exemples 2 :**

$\frac{∂}{∂x}\left(k\frac{∂T}{∂x}\right)+\frac{∂}{∂y}\left(k\frac{∂T}{∂y}\right)+\frac{∂}{∂z}\left(k\frac{∂T}{∂z}\right)+e\_{gen }^{.}=ρ.C. \frac{∂T}{∂t}$ ……………… (1.31)

**-** 2-D bidimensionnelle **(x,y)**$ \frac{∂}{∂z}\left(k\frac{∂T}{∂z}\right)=0$

**-** Régime permennt$\frac{∂T}{∂t}=0$

-Pas génération de chaleur$e\_{gen }^{.}=0$

Propriétés constante (k = cte)

L’équation de la place qui est elliptique (1.31)

$\frac{∂^{2}T}{∂^{2}x} $+$ \frac{∂^{2}T}{∂^{2}y}=0$ K= cte

$A\frac{∂^{2}Φ}{∂X^{2}}$ +$ B\frac{∂^{2}Φ}{∂xy}+C\frac{∂^{2}Φ}{∂^{2}z}$ + D$\frac{∂Φ}{∂x}$ +$ E\frac{∂^{2}Φ}{∂y}+EΦ+G\left(x,y\right)=0$

Δ = (b2 -4.a.c) = -4 $<0$ , A = 1, B = 0, C = 1 équation elliptique

L’équation de la conductivité de chaleur avec la génération de chaleur

$\frac{∂^{2}T}{∂^{2}x} $+$ \frac{∂^{2}T}{∂^{2}y}+\frac{e\_{gen }^{.}}{k}=0$

La quelle est une équation elliptique

 La caractéristique de l’équation elliptique est quelle exige la spécifique les conditions au limite appropriées a toutes les limites

\* les équations de la conduction thermique en regime variable (transitoire) sans génération de chaleur avec K= cet

$\frac{∂^{2}T}{∂^{2}x}= \frac{1}{α}. \frac{∂T}{∂t}$ Équation parabolique unidimensionnelle (1-D)

$A\frac{∂^{2}Φ}{∂X^{2}} $+$ B\frac{∂^{2}Φ}{∂xy}+C\frac{∂^{2}Φ}{∂^{2}z} $+ D$\frac{∂Φ}{∂x}$ +$ E\frac{∂^{2}Φ}{∂y}+EΦ+G\left(x,y\right)=0$

A=0 B=0 C = 0  ∆=0

 L’équation d’ordre deux 2eme Ordre

$\frac{∂^{2}Φ}{∂^{2}x}= \frac{1}{C^{2}}. \frac{∂^{2}ΦT}{∂t}$ $…………………………………………………………\left(I.5\right)$

On t et le temps x est la variable d’espace, et c et la variable de la vitesse de la propagation de l’onde

A= 1, B= 0, C =$ \frac{1}{C^{2}}$ ∆=$\frac{1}{C^{2}}>$0

Est l’équation hyperbolique

* l’équation de la conduction de chaleur (2D) régime transitoire, avec la génération de chaleur et propriété constante K=cst

$\frac{∂^{2}T}{∂^{2}x}+\frac{∂^{2}T}{∂y^{2}}+\frac{e\_{gen }^{.}}{k}= \frac{1}{α}. \frac{∂T}{∂t}$

Est une équation parabolique dans le temps

**II.5. Résolution des systèmes d’équations linières**

**II.5.1 Motivation**

Dans cette partie, nous intéressant à la résolution l’équation algébrique lainière qui la forme générale suivant :

$\left\{\begin{matrix}a\_{11}x\_{1}&a\_{12}x\_{2}&\begin{matrix}\cdots &a\_{1n}x\_{n }=\end{matrix}b\_{1}\\a\_{21}x\_{1}&a\_{22}x\_{2}&\begin{matrix}\cdots &a\_{21}x\_{n}\end{matrix}=b\_{2}\\\begin{matrix}\vdots \\a\_{11}x\_{1}\end{matrix}&\begin{matrix}\vdots \\a\_{12}x\_{2}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}\vdots \\a\_{nn}x\_{n}=b\_{3}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right.$ ……………………………. $\left(II.11\right)$

Ou les coefficients a $a\_{11}$ $a\_{12 } a\_{nn}$ , sont des coefficients constants et n le nombre d’équations.

Pour de petit nombre d’équation n ≤ 3

L’équation linière (par fois non linéaires) peut être resaluer par des techniques simples (Méthode cramer)

\*cependant pour quatre équations ou plus la résolution deviennent ordeuse et les ordinateur doivent être utilisé.

La méthode d’élimination de Gouss (Méthode directe), algorithme de thomas (Méthode directe) et l méthode de Gouss-seidel (Méthode itérative) seront présentes dans ce chapitre ainsi leurs algorithme.

Notation matricielle :

$\left[A\right]$=$\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\begin{matrix}a\_{13}&\cdots &a\_{1m}\end{matrix}\\\begin{matrix}a\_{21}\\\vdots \end{matrix}&\begin{matrix}a\_{22}\\\vdots \end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{23}\\\vdots \end{matrix}&\cdots &\begin{matrix}a\_{2m}\\\vdots \end{matrix}\end{matrix}\\a\_{n1}&a\_{n2}&\begin{matrix}a\_{n3}&\cdots &a\_{nm}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

La matrice dans la figure (II.1) a. n rangée et m colonnes ayant une dimension de n par m (ou n x m) elle est appelé n x m

Les matricer n=1 $\left[B\right]$=$\left[\begin{matrix}b\_{1}&\begin{matrix}b\_{2}&\cdots \end{matrix}&b\_{m}\end{matrix}\right]$ est appelées vecteur rangée

\*les matricer avec m=1

$\left[C\right]$=$\left[\begin{matrix}C\_{1}\\\begin{matrix}C\_{2}\\\vdots \end{matrix}\\C\_{n}\end{matrix}\right]$

* la matricer ou n=m sont appelées matricer carres par exemple une matricer u par u

$\left[A\right]$=$\left[\begin{matrix}a\_{12}&a\_{12}&\begin{matrix}a\_{13}&a\_{14}\end{matrix}\\a\_{21}&a\_{22}&\begin{matrix}a\_{23}&a\_{24}\end{matrix}\\\begin{matrix}a\_{31}\\a\_{41}\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{32}\\a\_{42}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{33}\\a\_{43}\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{34}\\a\_{44}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

\*une matricé symétrique

$$\left[A\right]=\left[\begin{matrix}5&1&1\\1&3&7\\2&7&8\end{matrix}\right]$$

$$a\_{ij}=a\_{ji}$$

$a\_{ij}$ Les éléments de la matricer, i désigne la lecture des éléments dans la direction horizontale, et j la lecture des éléments dans la direction verticale.

* **une matrice triangulaire supérieure**

$$\left[A\right]=\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\0&a\_{22}&a\_{23}\\0&0&a\_{33}\end{matrix}\right]$$

* **une matrice triangulaire inferieure**

$$\left[A\right]=\left[\begin{matrix}a\_{11}&0&0\\a\_{21}&a\_{22}&0\\a\_{31}&a\_{31}&a\_{33}\end{matrix}\right]$$

* **une matricé d’identité**

$$\left[A\right]=\left[\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right]$$

* **une matricé tri diagonale à la forme suivante:**

$\left[A\right]$=$\left[\begin{matrix}a\_{12}&a\_{12}&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\a\_{21}&a\_{22}&\begin{matrix}a\_{23}&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{32}\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{33}\\a\_{43}\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{34}\\a\_{44}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

**II.5.2. Méthode de Gauss-seidel :**

Quand le nombre d’équation est très largue une méthode itérative préfère à la méthode directe de solution.

-la Méthode itérative converger bien pour un système d’équation ayant une diagonale dominante (pas de zéro) parmi les Méthode itérative ,on a la méthode de (gauss-seidel),cette Méthode est plus utiliser dans méthode itérative

\*supposer que nous vons un système d’équation de n équations

$$\left[A\right]\left[X\right]=\left\{B\right\}$$

\* prenons n=3, un système d’équation de 3X3

\* Si les éléments de la diagonale sont tous nuls

A= $\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&a\_{13}\\a\_{21}&a\_{22}&a\_{23}\\a\_{31}&a\_{32}&a\_{33}\end{matrix}\right]$=$\left\{\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right\}$,$ \left\{B\right\}=\left\{\begin{matrix}b\_{1}\\b\_{2}\\b\_{3}\end{matrix}\right\}$

* le système d’équation (n=3)

$a\_{11}x\_{1+}a\_{12 }x\_{2}+a\_{13}x\_{3}$=$b\_{1}$

$a\_{21}x\_{1+}a\_{22 }x\_{2}+a\_{23}x\_{3}$=$b\_{2}$ $……………………………….\left(II.12\right)$

$a\_{31}x\_{1+}a\_{32 }x\_{2}+a\_{33}x\_{3}$=$b\_{3}$

La première équation peut être résolue pour $x\_{1}$

La deuxième équation peut être résolue pour $x\_{21}$

La troisième équation peut être résolue pour $x\_{3}$

* $x\_{1}=\frac{b\_{1}-a\_{12 }x\_{2}-a\_{13}x\_{3}}{ a\_{11}}…….$ ………………………...$\left(II.13.a\right)$

$=>x\_{2}=\frac{b\_{2}-a\_{21 }x\_{1}-a\_{23}x\_{3}}{ a\_{22}}………………………………….$ $\left(II.13.b\right)$

$$=>x\_{3}=\frac{b\_{3}-a\_{31 }x\_{1}-a\_{32}x\_{2}}{ a\_{33}}…………………………..\left(II.13.c\right)$$

Maintenant nous peuvent commencer la procédure de solution on chassions la valeur estimer$x\_{1},x\_{2},x\_{3}$.

Une méthode simple pour obtenir les estimations initiales et de supposer que des valeurs $x\_{2},x\_{3}$ sont nulles ces zéros sont remplacé de (II.13-a) pour calculer $x\_{1}=\frac{b\_{1}}{a\_{11}}$.alors nous remplaçons cette valeur de $x\_{1}$dans l’équation de (II.13-b) pour calculer la nouvelle valeur de $x\_{2}$.

La procédure est répétée pour l’équation (II.13.c) pour calculer une nouvelle estimation pour$ x\_{3}$.

Ainsi nous retournons a la première équation est répété la procédure jusqu’ votre solution converge assis près des valeurs critère.

* la convergence peut être vérifiée en utilisant le critère suivant :

$\left|ɛ\_{i}\right|$=$\left|\frac{x\_{i}^{j}-x\_{i}^{j-1}}{x\_{i}^{j}}\right|$<$ɛ\_{i}$

pour tout i ($x\_{i}$,i=1,,,,,n)

j et j-1 sont respectivement la présente et la précédente itérations.

**Exemple 2.1**

Utiliser la méthode de Gauss-seidel pour obtenir la solution du système d’équation suivant :

$3x\_{1}-0.1x\_{2}-0.2x\_{3 }$= 7.85

$0.1x\_{1}+7x\_{2}-0.3x\_{3 } $= -19.3 $……………………………………….\left(II.14\right)$

$0.3x\_{1}-0.2x\_{2}+10x\_{3} $= 71.4

Sachant que la solution exacte est $x\_{1}=3, x\_{2}=2.5,$et $x\_{3}=7$

Estimer $x\_{2}=0$ et $x\_{3}=0$

* $x\_{1}=\frac{7.85-0.1x\_{2}-0.2x\_{3}}{3}$ ……………………………………...($II.14.a$)
* $x\_{2}=\frac{-19.3-0.1x\_{1}+0.3x\_{3}}{7}$ …………………………………….($II.14.b$)
* $x\_{3}=\frac{71.4-0.3x\_{1}-0.2x\_{2}}{10}………………………………………….$ ($II.14.c$)

L’équation (II.14.a) $x\_{1}=\frac{7.85+0+0}{3} $= 2.6166

Cette valeur avec $x\_{3}$=0 est remplacer à l’équation (II.14.b) pour calculer

 $x\_{2}=\frac{-19.3-0.1(2.6166)+0}{7} $= -2.7945

La première itération est terminée, en remplaçant la valeur de $x\_{1}et x\_{2}$dans l’équation (II.14.c) pour obtenir $x\_{3}$

$x\_{3}=\frac{71.4-0.3(2.6166)-0.2(-2.7945)}{10} $= 7.0056.

Pour la 2emeitération la même

$$\left|ɛ\_{i}\right|=0.31\% x\_{1}=\frac{7.85-0.1\left(-2.7945\right)+0.2(7.0056)}{3}=2.9905$$

$$\left|ɛ\_{i}\right|=0.015\% x\_{2}=\frac{-19.3-0.1(2.9905)+0.3(7.0056)}{7}=-2.49962$$

$$\left|ɛ\_{i}\right|=0.0012\% x\_{3}=\frac{71.4-0.3\left(2.990557\right)+0.2(-2.49962)}{10}=7.00029$$

La méthode est, par conséquence, converge vers la solution exacte des itérations en plus peuvent être appliquées pour améliorer la solution

**II.5.3 Amélioration de la convergence en utilisant la relaxation :**

La relaxation une légère modification de la méthode de Gauss-seidel et elle est désignée pour augmenter la convergence, donnée par la relation suivante :

$x\_{i}^{Ne}$=λ$x\_{i}^{Ne}+(1-$ λ)$ x\_{i}^{old}$

λ: facteur de relaxation, 0< λ<2

Si 0< λ<1 :=> sous relaxation

Si 0< λ<2 :=> sur relaxation

Si 𝝀 = 𝟏 la méthode est dite Gauss- Seidel

**II.5.4 Méthode de Jacobi**

**Exemple :** soit le système suivant :

\*le système d’équation (n=3)

$a\_{11}x\_{1+}a\_{12 }x\_{2}+a\_{13}x\_{3}$=$b\_{1}$

$a\_{21}x\_{1+}a\_{22 }x\_{2}+a\_{23}x\_{3}$=$b\_{2}……………………………………$($II.15$)

$a\_{31}x\_{1+}a\_{32 }x\_{2}+a\_{33}x\_{3}$=$b\_{3}$

La première équation peut être résolue pour $x\_{1}$

La deuxième équation peut être résolue pour $x\_{21}$

La troisième équation peut être résolue pour $x\_{3}$

* $x\_{1}=\frac{b\_{1}-a\_{12 }x\_{2}-a\_{13}x\_{3}}{ a\_{11}}…………………………………$ ($II.15.a$)

$=>x\_{2}=\frac{b\_{2}-a\_{21 }x\_{1}-a\_{23}x\_{3}}{ a\_{22}}…………………………………..$($II.15.b$)

$=>x\_{3}=\frac{b\_{3}-a\_{31 }x\_{1}-a\_{32}x\_{2}}{ a\_{33}}…………………………………..$($II.15.c$)

Maintenant nous peuvent commencer la procédure de solution on chassions la valeur estimer$x\_{1},x\_{2},x\_{3}$.

Une méthode simple pour obtenir les estimations initiales et de supposer que des valeurs $x\_{2},x\_{3}$ sont nulles ces zéros sont remplacé de (15-a) pour calculer $x\_{1}=\frac{b\_{1}}{a\_{11}}$.alors nous remplaçons cette valeur de $x\_{1}$dans l’équation de (2.15-b) pour calculer la nouvelle valeur de $x\_{2}$.

La procédure est répétée pour l’équation (15.c) pour calculer une nouvelle estimation pour$ x\_{3}$.

A la 1 ère itération on donne des valeurs initiales à$ x\_{1},x\_{2},x\_{3}$, soit $(x\_{1}=x\_{2=}x\_{3}=0)$, on obtient $x\_{1},x\_{2},x\_{3}$ ensuite on passe à la 2ème itération (itération 2), on calcule $x\_{1},x\_{2},x\_{3}$ à partir de $(x\_{1},x\_{2},x\_{3})$de 1ère itération et ainsi de suite jusqu’à la convergence :

**II.5.5. Méthode de résolution directe :**

Le problème essentiel de la méthode directe est la place mémoire. Cette méthode présente des avantages et des inconvénients par rapport à la méthode itérative :

**\*Avantage :**

- Le temps de calcul en général plus petit pour une même précision ;

- Dans certains cas la méthode itérative peut ne pas converger.

**\*Inconvénients :**

- Occupation mémoire importante ;

-Risque d’erreur d’arrondis importante si certains pivots sont trop petit ;

 La méthode directe n’est pas applicable aux équations non linéaires.

**II.5.5.1 Méthode d’élimination de Gauss :**

Soit le système donné sous cette forme

$\left\{\begin{matrix}a\_{11}x\_{1}&a\_{12}x\_{2}&\begin{matrix}\cdots &a\_{1n}x\_{n }=\end{matrix}b\_{1}\\a\_{21}x\_{1}&a\_{22}x\_{2}&\begin{matrix}\cdots &a\_{21}x\_{n}\end{matrix}=b\_{2}\\\begin{matrix}\vdots \\a\_{11}x\_{1}\end{matrix}&\begin{matrix}\vdots \\a\_{12}x\_{2}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\cdots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}\vdots \\a\_{nn}x\_{n}=b\_{3}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right.…………………………………$($II.16$)

$\left[A\right]$=$\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\begin{matrix}a\_{13}&\cdots &a\_{1m}\end{matrix}\\\begin{matrix}a\_{21}\\\vdots \end{matrix}&\begin{matrix}a\_{22}\\\vdots \end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{23}\\\vdots \end{matrix}&\cdots &\begin{matrix}a\_{2m}\\\vdots \end{matrix}\end{matrix}\\a\_{n1}&a\_{n2}&\begin{matrix}a\_{n3}&\cdots &a\_{nm}\end{matrix}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\\begin{matrix}\vdots \\x\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}b\_{1}\\b\_{2}\\\begin{matrix}\vdots \\b\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

𝐴. 𝑋 = 𝑏

La méthode consiste à transformer la matrice **A** en une matrice triangulaire supérieure **S**, le vecteur b subit les mêmes opérations et devient **b’**

𝑆. 𝑋 =𝑏’

$\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}&\begin{matrix}a\_{13}&\cdots &a\_{1n}\end{matrix}\\0&a\_{22}^{'}&\begin{matrix}a\_{23}^{'}&\cdots &a\_{2n}^{'}\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\\vdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\\vdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{33}^{'}\\\vdots \\0\end{matrix}&\begin{matrix}\cdots \\\vdots \\\cdots \end{matrix}&\begin{matrix}a\_{3n}^{'}\\\vdots \\a\_{nn}^{'}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\\begin{matrix}\vdots \\\vdots \\x\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}b\_{1}\\b\_{2}^{'}\\\begin{matrix}b\_{3}^{'}\\\vdots \\b\_{n}^{'}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

**Exemple :** Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{matrix}3x\_{1}-&x\_{2}+&2x\_{3}=12……(1)\\x\_{1}+&2x\_{2}+&3x\_{3}=11……(2)\\2x\_{1}-&2x\_{2}-&x\_{3 } =2……..(3)\end{matrix}\right.$$

$$\left[\begin{matrix}3&-1&2\\1&2&3\\2&-2&-1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]$$

**Etape 1 :** Elimination de 𝑥i des équations **(2)** et **(3)**

eq2 -$ \frac{a\_{21}}{a\_{11}}$. eq1= eq2-$ \frac{1}{3}$. eq1

eq2 -$ \frac{a\_{31}}{a\_{11}}$. eq1= eq3-$ \frac{1}{3}$. eq1

On obtient le système suivant :

$\left\{\begin{matrix}3x\_{1}-&x\_{2}+&2x\_{3}=12 (1)\\0.x\_{1}+&2.33x\_{2}+&2.33x\_{3}=7 (2^{'})\\0x\_{1}-&1.33x\_{2}-&2.33x\_{3 } =-6 (3^{'})\end{matrix}\right.$

$\left[\begin{matrix}3&-1&2\\0&2.33&2.33\\0&-1.33&-2.33\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}12\\7\\-6\end{matrix}\right]$

**Etape 2 :** Elimination de 𝑥􀬶 des équations **(3’)**

eq3’ -$ \frac{a\_{32}^{'}}{a\_{22}^{'}}$. eq2’= eq3’-$ \frac{(-1.33)}{2.33}$. eq2’

$\left\{\begin{matrix}3x\_{1}-&x\_{2}+&2x\_{3}=12 (1)\\0.x\_{1}+&2.33x\_{2}+&2.33x\_{3}=7 (2^{'})\\0x\_{1}-&0x\_{2}-&x\_{3 } =-2 (3^{''})\end{matrix}\right.$

$\left[\begin{matrix}3&-1&2\\0&2.33&2.33\\0&0&-1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}12\\7\\-2\end{matrix}\right]$

**Etape 3 :** substitution en arrière

De l’équation $(3^{''})$ on obtient

 x3 =2

De $(2^{'})$ on obtient :

2,33𝑥2 + 2,33𝑥3 = 7

x2=1

De (𝟏) on obtient :

𝑥1=( 12+ 𝑥2 - 2𝑥3)/3

𝑥1 = 3

**II.5.5.2 Algorithme de Thomas (Méthode direct)**

Considérer un système de N équation algébrique le coefficient de la matrice tri diagonal est les suivants

$\left[\begin{matrix}b\_{1}&c\_{1}&\begin{matrix}0&O&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{matrix}\\a\_{1}&b\_{2}&\begin{matrix}c\_{2}&0&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\\vdots \\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{3}\\\vdots \\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}b\_{3}\\\ddots \\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}C\_{3}\\\ddots \\\begin{matrix}\ddots \\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}\ddots &O\end{matrix}\\\begin{matrix}\begin{matrix}b\_{n-1}\\a\_{n}\end{matrix}&\begin{matrix}c\_{n-1}\\b\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}T\_{1}\\T\_{2}\\\begin{matrix}T\_{3}\\\vdots \\\begin{matrix}T\_{n-1}\\T\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}d\_{1}\\d\_{2}\\\begin{matrix}d\_{3}\\\vdots \\\begin{matrix}d\_{n-1}\\d\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

**1ere étape :**

La première équation (Eq(1)) est choisie comme’ pivot ‘

Multipliée x$\frac{a\_{2}}{b\_{1}}$. (Eq(1) x $\frac{a\_{2}}{b\_{1}}$ ) est soustrait à partir de la deuxième équation (Eq(2)) pour éliminer a2 de l’équation (Eq(2))

Nouveau a2 = a2 –$\left[\frac{a\_{2}}{b\_{1}}\right]$xb1=0

Nouveau b2 = b2 –$\left[\frac{a\_{2}}{b\_{1}}\right]$xC1=0

Nouveau d2 = d2 –$\left[\frac{a\_{2}}{b\_{1}}\right]$xd1=0

**2ere étape :**

La deuxième équation Eq (2) modifiée

Est choisir comme pivot, une approche similaire est suive pour éliminer, a3

Nouveau a3= 0

Nouveau b3 = b3 –$\left[\frac{a\_{3}}{b\_{2}}\right]$XC2=0

Nouveau d3= d3 –$\left[\frac{a\_{3}}{b\_{2}}\right]$xd2=0

**3ere étape**:

 La procédure est continue jusqu’à aN est éliminé (aN=0)

De la dernière équation Eq(N)

**En générale :**

Remplacer bi par bi –$\left[\frac{a\_{i}}{b\_{i-1}}\right] $x Ci-1=0 pour i=2,3,…N

Remplacer di par di –$\left[\frac{a\_{i}}{b\_{i-1}}\right] $x di-1=0 pour i=2,3,…N

les inconnues Ti($T\_{1}, T\_{2},T\_{3}$……$T\_{N}$) sont calculés par substitution, en arriérée commençant de la dernière équation :

$$T\_{N}=\frac{d\_{N}}{b\_{N}}$$

$T\_{i=\frac{d\_{i- }C\_{i }\* T\_{i-1}}{b\_{i}}} $, i=N-1, N-2 ………

**Exemple :** considère de système suivant une matrice à coefficient tri diagonale

Résoudre le système avec la méthode de thomas

$\left[\begin{matrix}-1&1&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\1&-2&\begin{matrix}1&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}&\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}T\_{1}\\T\_{2}\\\begin{matrix}T\_{3}\\T\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}-40\\-30\\\begin{matrix}-30\\-30\end{matrix}\end{matrix}\right]$

$$\left\{\begin{matrix}-T\_{1}+&T\_{2 } =\\T\_{1}&\begin{matrix}-T\_{2}&T\_{3}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{2}\\T\_{3}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}2T\_{3}\\2T\_{4}\end{matrix}&T\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\right.=-30$$

Appliquons les équations (2.14a) et (2.14b)

$\left[\begin{matrix}b\_{1}&c\_{1}&0\\a\_{2}&b\_{2}&c\_{2}\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{3}\\0\end{matrix}&\begin{matrix}b\_{3}\\a\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}T\_{1}\\T\_{2}\\\begin{matrix}T\_{3}\\T\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}d\_{1}\\d\_{2}\\\begin{matrix}d\_{3}\\d\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\right]$

Remplacer bi par :

bi-$\left(\frac{a\_{i}}{b\_{i-1}}\right)c\_{i-1}$

$$\left\{\begin{matrix}b\_{1= }-1\\b\_{2= -}2-\left(\frac{1}{-1}\right)X1=-1\\\begin{matrix}b\_{3= -}2-\left(\frac{1}{-1}\right)X1=-1\\b\_{4= -}2-\left(\frac{1}{-1}\right)X1=-1\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

Remplacer di par : di-$\left(\frac{a\_{i}}{b\_{i-1}}\right)d\_{i-1}$, i=2, 3,4

$$\left\{\begin{matrix}d\_{1= }-1\\d\_{2= -}30-\left(\frac{1}{-1}\right)X-40=-70\\\begin{matrix}b\_{3= -}30-\left(\frac{1}{-1}\right)X-70=-100\\b\_{4= -}30-\left(\frac{1}{-1}\right)X-100=-130\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

Appliquons l’eq 2.20 pour calculer :

$$T\_{1}, T\_{2},T\_{3},,T\_{4}$$

$T\_{4}= \frac{d\_{4}}{b\_{4}} $=$ \frac{ -130}{-1}$=130

$$T\_{3=\frac{d\_{3- }C\_{3 }\* T\_{4}}{b\_{3}} = \frac{-100-1X130}{-1} = 230} $$

$$T\_{2=\frac{d\_{3- }C\_{2 }\* T\_{3}}{b\_{2}} =\frac{ -70-1X230}{-1} = 300}$$

$$T\_{1=\frac{d\_{1- }C\_{1 }\* T\_{2}}{b\_{2}} = \frac{-40-1X300}{-1}= 340}$$