Introduction aux systèmes dynamiques

Allal MEHAZZEM

Centre Universitaire Abdlehafidh Boussouf Mila

2020 2021

Notions de systèmes dynamiques

(Flot, portrait de phase, orbite)

Champs de vecteurs

Définition 1 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ Une application

$$X : x = (x_1,\ \dots x_n) \to (f_1(x),\ \dots,\ f_n(x))$$

de classe C^k définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est appelée un champ de vecteurs de classe C^k sur U. À un tel champ de vecteur, on associe le système différentiel

$$\{\dot{x}_i = f_i(x_1,\ \dots,\ x_n) | i \in \{1,\ n\}\} \ \Leftrightarrow\ \dot{x} = X(x)\ .$$

L'ouvert U est appelé l'espace des phases du champ de vecteurs (ou du système différentiel associé).
De faąon générale, on appelle champ de vecteur différentiable un champ de vecteur de classe C^k avec $k \geq 1$.
D'après le Théorème CL, pour tout $x_0 \in U$, il existe une unique solution maximale $x(t)$du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & X(x) \; , \\ x(0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

Notons également que, dans ce contexte, toute condition $x(t_0) = x_0$ peut être transformée grâce à une translation évidente de la variable temps en une condition initiale $x(0) = x_0$.

Définition 2:. L'application $\phi_t : x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur au temps t de la solution maximale $x(t)\mathrm{du}$ problème de Cauchy est appelée le flot au temps $t\mathrm{du}$ champ X.
Le flot du champ de vecteurs X est l'application ϕ qui associe à $(t,\ x_0)$ la valeur au temps t de la solution maximale $x(t)\mathrm{du}$ problème de Cauchy :

$$(t,\ x_0) \mapsto \phi(t,\ x_0) = \phi_t(x_0) = x(t)\ .$$

Si ϕ est définie pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$ et tout condition initiale $x_0 \in U$, alors le flot est dit complet.

Définition 3:. L'orbite (ou courbe intégrale) $\Gamma \mathrm{du}$ champ de vecteurs X passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donnés par la solution de () avec donnée initiale x_0. Cette courbe est orientée par le sens de variation de t. En chacun de ses point $x(t)$, sa tangente est la droite passant par $x(t)$ dirigée par le vecteur $X(x(t))$. On distingue éventuellement l'orbite positive $\Gamma_+ = \{x(t),\ t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\Gamma_- = \{x(t),\ t \leq 0\}$.

Corollaire 1:. Les orbites du champ de vecteurs X forment une partition de l'espace des phases U appelé portrait de phase.
Ce corollaire est une conséquence directe de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy bien posé et donc du théorème de Cauchy-Lipschitz.
L'analyse qualitative a pour objet d'étudier les caractéristiques géométriques (essentiellement les invariants dynamiques) du portrait de phase et de déduire de cette organisation sous-jacente de la dynamique les propriétés des solutions.
Définition 4: Un point singulier (ou point d'équilibre) du champ de vecteurs $X = (f_i)_{i=1}^{n}$ est un point $p \in U$ où toutes les composantes du champ s'annulent simultanément :

$$\forall i \in [1,\ n\mathrm{I},\ f_i(p) = 0 \ \Leftrightarrow \ X(p) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Définition 5:. Deux champs de vecteurs X et Y sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme h qui envoie les orbites de X sur celles de Y en préservant leur orientation par le temps. Ainsi, si X est défini sur U et si on note $\phi(t,\ x)$ et $\psi(t,\ x)$ les flots de X et Y respectivement, alors

$$\forall x \in U,\ \forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in]0,\ \delta[,\ \exists t' \in]0,\ \varepsilon[,\ h(\phi(t,\ x)) = \psi(t',\ h(x)$$

Définition 6: . Soient X un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit Γ l'orbite de X passant par x_0. Elle est paramétrisée par une solution maximale $x(t)\mathrm{du}$ problème de Cauchy associé : $\Gamma = \{x(t) | t \in (\alpha,\ \beta)\}$.

• Si $\beta = +\infty$, l'ensemble w-limite de l'orbite (ou de x_0) est défini par

$$w(x_0) = \{q \in U | \exists (t_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, (t_n) \to +\infty \text{ et } (x(t_n)) \to q\}.$$

• Si $\alpha = -\infty$, l'ensemble α-limite de l'orbite (ou de x_0) est défini par

$$\alpha(x_0) = \{q \in U | \exists (t_{r\iota}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ (t_n) \to -\infty \ \mathrm{et}\ (x(t_n)) \to q\}.$$

Tous les points d'une même orbite ont les mêmes ensembles α-limite et w-limite.

Dans le théorème suivant, on peut remplacer w-limite par α-limite (avec des changements évidents).

Théorème: . Soit X un champ de vecteurs de classe C^k déiini sur un ouvert U et $p \in U$. On suppose que la demi-orbite positive $\Gamma^+(p) = \{\phi(t,p) | t \geq 0\}$ est contenue dans un compact $K \subset U$. Alors $w(p)$ est non vide, compact connexe et invariant par le flot.

Preuve. Soit une suite de réels $(t_n) \to +\infty$. Comme la suite $\phi(t_n, p)$ est contenue dans un compact, il existe une sous-suite convergente. Soit q la limite de cette sous-suite, on a $q \in c \supset (p)$ et $c \supset (p) \neq \emptyset$.
Soit (q_n) une suite de $(v(p)$ qui converge vers un point q.
Montrons que $q \in w(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(t_m^n)_m$ telle que $(\phi(t_m^n, p))_m \to q_n$. On choisit $m(n)$ tel que, pour tout $n, t_n = t_{m(n)}^n > n$ et $d(\phi(t_n, p),\ q_n) < \dfrac{1}{n}$. On a $d(\phi(t_n, p),\ q) \to 0$ et donc $q \in w(p)$. L'ensemble $\alpha 1(p)$ est un fermé contenu dans un compact, il est donc compact.
L'invariance de $w(p)$ par le $\mathrm{f} \ddagger \mathrm{ot}$ est évidente.
Montrons par l'absurde que $c \supset (p)$ est connexe. Supposons que $w(p)$ est l'union de deux fermés disjoints A et B et on pose $d = d(A,\ B)$. Il existe une suite (t_n') telle que $\phi(t_n',\ p) \to a \in A$ et une autre suite $(t_n'') \to +\infty$ telle que $\phi(t_n'', p) \to b \in B$. On peut donc former une nouvelle suite (t_n) telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ d(\phi(t_{2k}, p),\ A) < d/2,$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ d(\phi(t_{2k+1}, p),\ A) > d/2.$$

La fonction $f(t) = d(\phi(t, p),\ A)$ est une fonction continue sur le segment $(t_n,\ t_{n+1})$ qui prend des valeurs supérieures et inférieures à $d/2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une valeur τ_n telle que $d(\phi(\tau_n, p),\ A) = d/2$. On peut extraire de la suite $(\phi(\tau_n, p))_n$ une suite convergente de limite q^* On a $q^* \in w(p)$ et

$$d(q^*,\ A) = d/2,$$

$$d(q^*,\ B) \geq d(A,\ B) - d(q^*,\ A) = d/2.$$

Il s'ensuit que q^* n'appartient ni à A ni à B, ce qui est contradictoire.

$\square$

Définition: Une orbite périodique d'un champ de vecteurs X est une orbite $\{x(t)|t \in \mathbb{R}\}$ ne contenant pas de point singulier de X, et telle qu'il existe un réel $T > 0$ appelé période vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t + T) = x(t)\ . \ (1.10)$$

Une telle orbite Γ contenant un point x_0 est donc entièrement définie par

$$\Gamma = \phi_{[0,T[}(x_0) = \{\phi_t(x_0)|t \in [0,\ T[\} = \{x(t)|t \in [0,\ T[\}.$$

Une orbite périodique isolée est appelée un cycle limite.
La période minimale de l'orbite est le plus petit nombre réel positif T qui satisfait la condition () . Les multiples de la période minimale sont aussi des périodes. Sans autre précision, on appelle (période d'une orbite" sa période minimale et "orbite T-périodique" une orbite de période minimale T.