Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques 2020-2021 Matière : *Analyse 03*

Solutions des exercice des suites et des séries de fonctions

1. Solutions des exercices des Suites de fonctions

Solution de l'exercice n°1

Etudions la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions :

1. $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{1-nx^2}{1+nx^2}$, $E_1 = [-a, a]$ puis sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

1.1 **Convergence simple :** Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = -1$. la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $E_1 = [-a, a]$ vers f, où $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.

1.2 **Convergence uniforme** :

1.2.1. Sur $E_1 = [-a, a]$. La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, il en résulte que (f_n) ne converge pas uniformément sur $E_1 = [-a, a]$.

1.2.2. Sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$. On a

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1-nx^2}{1+nx^2} - (-1)\right| = \left|\frac{2}{1+nx^2}\right| \leq \frac{2}{1+na^2}.$$

Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers -1 sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

2. $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $E_3 = [0, 1]$.

2.1 **Convergence simple :** Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = 0$. la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $E_3 = [0, 1]$ vers la fonction nulle $f = 0$.

2.2 **Convergence uniforme :** Puisque chaque fonction $x \in E_3 \mapsto f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ est croissante sur E_3, on a donc $\sup\left|f_n(x) - f(x)\right| = \dfrac{1}{1+n}$. Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers 0 sur E_3

3. $\mathrm{f}_n(x) = \cos(\dfrac{5+nx}{n})$, $E_4 = \mathbb{R}$.

3.1 **Convergence simple :** Si $x = 0$, $f_n(0) = \cos(\frac{5}{n})$, et $\lim f_n(0) = 0$. Quand $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = \cos(x)$. Dans tous les cas, la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $E_4 = \mathbb{R}$ vers f, où $f(x) = \cos(x)$.

3.2 **Convergence uniforme :** Nous avons

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - f(x)\right| &= \left|\cos(\frac{5+nx}{n}) - \cos(x)\right| = \left|\cos(x)\times\cos(\frac{5}{n}) - \sin(x)\times\sin(\frac{5}{n}) - \cos(x)\right| \\ &\leq |\cos(x)|\times\left(\left|\cos(\frac{5}{n}) - 1\right| + |\sin(x)|\times\left|\sin(\frac{5}{n})\right|\right) \\ &\leq \frac{25}{2n^2} + \frac{5}{n}.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers 0 sur E_4.

4. $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$ et $\mathrm{f}_n(0) = 0$, $E_5 = \mathbb{R}$ puis sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$

4.1 **Convergence simple :** Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = 0$. la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers $f(x) = 0$.

4.2 **Convergence uniforme : 4.2.1** Sur $E_6 = -\mathbb{R}$. Considérons la suite de points $(x_n = \dfrac{\pi}{2n})$. On a $\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \dfrac{2}{\pi} \nrightarrow 0$, il en résulte que (f_n) ne converge pas uniformément sur $E_5 = \mathbb{R}$.

4.2.2. Sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$. On a $\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\dfrac{\sin(nx)}{nx}\right| = \dfrac{1}{nx} \leq \dfrac{1}{na}$. Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers 0 sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

5. $f_n(x) = x^n(1-x)$, $E_7 = [0, 1]$.

5.1 **Convergence simple :** Si $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$, et la suite converge vers 0. Si $x \in]0, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Finalement, la suite f_n converge simplement sur $[0, 1]$ et sa limite est la fonction nulle $f(x) = 0$.

5.2 **Convergence uniforme :** En effectuant un calcul simple, on trouve

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x) - f(x)\right| = a_n, \text{ tel que } a_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Cette dernière quantité équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{ne}$. Puisque cette quantité tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions considérée converge uniformément vers 0 sur le segment $[0, 1]$.

2. **Solutions des exercices des séries de fonctions**

Solution de l'exercice n°1

1. Si $x = 0, \sum_{n\geq 0} f_n(x) = 0$ et la série converge. Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \sin^2(x)\cos^n(x),\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

est une série géométrique de raison $q = \cos(x) \in [0, 1[$, et donc elle converge sur $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Finalement

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}, \text{ si } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, \text{ si } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

2. Puisque S est discontinue en 0, $\sum_{n\geq 0} f_n$, ne donc converge pas uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution de l'exercice n°2

1. Si $x = 0, \sum_{n\geq 0} f_n(x) = 0$ et la série converge. Si $x \neq 0$, la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$, et donc elle converge pour tout $x \neq 0$. Finalement

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

2. Puisque S est discontinue en 0, $\sum_{n\geq 1} f_n$, ne donc converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Etudions la convergence normale sur $[a, b]$ $(0 < a < b)$. On a

$$\left|f_n(x)\right| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \leq \frac{x}{(1+a^2)^n} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}, \forall x \in [a, b],$$

qui est le terme général d'une série géométrique converge, et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
4. Calculons $\sum_{n\geq 1} \int_1^e f_n(x)dx$. Puisque la série de fonctions est normalement convergente sur $[1, e]$, elle est intégrable terme à terme sur ce segment.On a alors :

$$\sum_{n\geq 1} \int_1^e f_n(x)dx = \int_1^e \sum_{n\geq 1} f_n(x)dx = \int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$