Chapitre I

ESPACES NORMÉS

Dans ce chapitre d'introduction, on donnera quelques généralités sur les espaces normés abstraits, avec des exemples, et on traitera le cas des espaces de dimension finie. C'est essentiellement un rappel des cours de Licence. Ce sera aussi l'occasion de fixer certaines notations.

I.1. Espaces vectoriels normés

I.1.1. Norme

Définition I.1.1. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une* **norme** *sur E est une application, le plus souvent notée $\|\,.\,\|$:*

$$\|\,.\,\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1) *a)* $\|x\| \geqslant 0$ *pour tout* $x \in E$ *et b)* $\boxed{\|x\| = 0 \iff x = 0}$;

2) $\boxed{\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|}$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$ (homogénéité);

3) $\boxed{\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$, $\forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Si on supprime le 1) b), on dit que $\|\,.\,\|$ est une *semi-norme*. Notons qu'alors 2) entraîne néanmoins que $\|0\| = 0$.

À partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $\boxed{d(x,y) = \|x - y\|}$. On définit alors les :

- boules ouvertes : $\overset{\circ}{B}(x,r) = \{y \in E\,;\ \|x - y\| < r\}$;
- boules fermées : $B(x,r) = \{y \in E\,;\ \|x - y\| \leqslant r\}$,

ce qui permet de définir une *topologie* sur E ; une partie A de E est *ouverte* (et on dit aussi que A est *un ouvert* de E) si pour tout $x \in A$ il existe une boule centrée en x, de rayon $r = r_x > 0$, contenue dans A. Il n'y a pas besoin de préciser s'il s'agit d'une boule ouverte ou d'une boule fermée. En effet, si A contient la boule fermée $B(x,r)$, elle contient *a fortiori* la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$; et, inversement, si A contient la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$, elle contient la boule fermée $B(x,r')$, pour tout $r' < r$. Notons que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert (puisqu'il n'y a aucun x dans A, la propriété définissant les ouverts est trivialement vérifiée). L'espace E tout entier est clairement un ouvert. Il résulte de la définition que toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : si $x \in A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, et $\overset{\circ}{B}(x,r_k) \subseteq A_k$, alors $\overset{\circ}{B}(x,r) \subseteq A$, avec $r = \min(r_1,\ldots,r_n)$.

Une partie V contenant le point $x_0 \in E$ est un ***voisinage*** de x_0 si elle contient une boule (ouverte ou fermée) de centre x_0, de rayon $r > 0$.

Une partie est ***fermée*** (on dit aussi que c'est *un fermé*) si son complémentaire est ouvert. Par complémentation, on obtient que $\emptyset$ et E sont des fermés, que l'intersection de toute famille de fermés est encore un fermé, ainsi que toute réunion d'un nombre fini de fermés.

Si $A \subseteq E$ est une partie de E, on appelle ***intérieur*** de A, et on note $\overset{\circ}{A}$, ou $\operatorname{int}(A)$, le plus grand ouvert contenu dans A (c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A), et on appelle ***adhérence***, ou ***fermeture***, de A le plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection de tous les fermés contenant A). On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. On rappelle (c'est facile à voir) que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x. On dit que A est ***dense*** dans E si $\overline{A} = E$.

Proposition I.1.2. *Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.*

Preuve. 1) Soit $x \in \overset{\circ}{B}(x_0,r_0)$ et soit $0 < r < r_0 - \|x - x_0\| > 0$. Pour $\|x-y\| \leqslant r$, on a $\|y - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \|x - x_0\| \leqslant r + \|x - x_0\| < r_0$; donc $B(x,r) \subseteq \overset{\circ}{B}(x_0,r_0)$.

2) Soit $x \notin B(x_0,r_0)$ et soit $0 < r < \|x - x_0\| - r_0$; alors $B(x,r) \subseteq [B(x_0,r_0)]^c$, puisque, si $\|y - x\| \leqslant r$, on a $\|y - x_0\| \geqslant \|x_0 - x\| - \|x - y\| \geqslant \|x_0 - x\| - r > r_0$. □

Toutes les notions topologiques précédentes ne font pas intervenir le fait que E soit un espace vectoriel, ni que la distance est définie à partir d'une norme ; elles sont donc valables dans tout espace métrique. Par contre, on a une propriété spécifique dans les espaces normés, qui justifie la notation des boules ouvertes : l'intérieur de $B(x,r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ et l'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ est la boule fermée $B(x,r)$ (voir ci-dessous).

Définition I.1.3. *Lorsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un* espace vectoriel normé, *ou, plus simplement, un* espace normé.

Notation. On notera par B_E la boule fermée $B(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1. On dira que c'est la **boule unité** de E.

Proposition I.1.4. *Si E est un espace normé, alors les applications :*

$$+: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

Définition I.1.5. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, muni d'une topologie. On dit que E est un* espace vectoriel topologique (e.v.t.) *si les applications :*

$$+: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

On dit qu'un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel topologique localement convexe, *ou* espace localement convexe (e.l.c.), *si tout point possède une base de voisinages convexes.*

Il résulte de la Proposition I.1.4, et du fait que les boules sont convexes, que tout espace normé est un *e.v.t.* localement convexe.

Preuve de la Proposition I.1.4. $E\times E$ et $\mathbb{K}\times E$ sont munis de la topologie-produit, qui peut être définie par les normes :

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \qquad \text{et} \qquad \|(\lambda,x)\| = \max\{|\lambda|,\|x\|\}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser les inégalités :

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| = \|(x-x_0)+(y-y_0)\| \leqslant \|x-x_0\| + \|y-y_0\|\,;$$

et :

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0) + \lambda_0(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0\| \\ &\leqslant |\lambda-\lambda_0|\,\|x-x_0\| + |\lambda_0|\,\|x-x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\|. \end{aligned} \qquad \square$$

Corollaire I.1.6. *Les translations :*

$$\tau_a: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \qquad (a\in E)$$

et les homothéties :

$$h_\lambda: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \qquad (\lambda\in\mathbb{K})$$

sont continues. Ce sont des homéomorphismes (si $\lambda\neq 0$ pour les homothéties).

Corollaire I.1.7. *Toutes les boules fermées de rayon $r>0$ sont homéomorphes entre-elles, donc à B_E. Toutes les boules ouvertes de rayon $r>0$ sont homéomorphes entre-elles.*

Corollaire I.1.8. *L'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ est la boule fermée $B(x,r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B(x,r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$.*

Preuve. 1) L'adhérence de la boule ouverte est évidemment contenue dans la boule fermée, puisque celle-ci est fermée dans E. Inversement, si $y \in B(x,r)$, on a $y_n = \frac{1}{n}x + (1-\frac{1}{n})y \in \overset{\circ}{B}(x,r)$ car $\|x - [\frac{1}{n}x + (1-\frac{1}{n})y]\| = (1-\frac{1}{n})\,\|x-y\| < r$; comme $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, on obtient $y \in \overline{\overset{\circ}{B}(x,r)}$.

2) Étant ouverte dans E, la boule ouverte est contenue dans l'intérieur de la boule fermée. Pour montrer l'inclusion inverse, il faut montrer que si y n'est pas dans la boule ouverte, alors aucune boule $B(y,\rho)$ de centre y et de rayon $\rho > 0$ n'est contenue dans $B(x,r)$. Or si $y \notin \overset{\circ}{B}(x,r)$, on a $\|y-x\| \geqslant r$. Pour tout $\rho > 0$, le vecteur $z = y + \frac{\rho}{\|y-x\|}(y-x)$ est dans $B(y,\rho)$, puisque $\|z-y\| = \frac{\rho}{\|y-x\|}\,\|y-x\| = \rho$, mais n'est pas dans $B(x,r)$, car $\|z-x\| = \left\|y + \frac{\rho}{\|y-x\|}(y-x) - x\right\| = \left(1 + \frac{\rho}{\|y-x\|}\right)\|y-x\| \geqslant \left(1 + \frac{\rho}{\|y-x\|}\right) r > r$. Donc y n'est pas dans l'intérieur de $B(x,r)$. □

Corollaire I.1.9. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors son adhérence $\overline{F}$ aussi.*

Preuve. Soit $x, y \in \overline{F}$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Il existe $x_n, y_n \in F$ tels que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Par la Proposition I.1.4, on a $ax+by = \lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n)$; et comme $ax_n + by_n \in F$, on obtient $ax + by \in \overline{F}$. □

Proposition I.1.10. *L'application $x \in E \longmapsto \|x\| \in \mathbf{R}_+$ est continue.*

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x-y\|$. □

I.1.2. Quelques exemples usuels

I.1.2.1. Espaces de suites

1) a) Il est immédiat de voir que si l'on pose, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{cases} \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\,; \\ \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \end{cases}$$

alors $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$.

On note $\ell_1^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_1)$ et $\ell_\infty^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_\infty)$.

b) Si p est un nombre réel vérifiant $1 < p < \infty$, on obtient une norme sur $\mathbf{R}^n$ en posant :

$$\boxed{\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}}.$$

On note $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_p)$.

Seule l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\Big(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\Big)^{1/p}},$$

appelée **inégalité de Minkowski**, n'est pas évidente ; elle peut se démontrer ainsi : Par convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p$, on a $[\alpha u + (1-\alpha)v]^p \leqslant \alpha u^p + (1-\alpha)v^p$ si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $u, v \geqslant 0$. Prenons $\alpha = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$ (de sorte que $1 - \alpha = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$), $u = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $v = \frac{|y_k|}{\|y\|_p}$ (si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_p = 0$, le résultat est évident). En sommant, on obtient $\frac{1}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \leqslant 1$, ce qui donne le résultat, puisque $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. □

Une inégalité *très utile* est l'**inégalité de Hölder**. Rappelons que si $1 < p < \infty$, l'**exposant conjugué** de p est le nombre q vérifiant $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$. Explicitement, $\boxed{q = \frac{p}{p-1}}$. On a $1 < q < \infty$, et p est l'exposant conjugué de q. Ils sont aussi liés par l'égalité $\boxed{(p-1)(q-1) = 1}$.

L'inégalité de Hölder s'énonce alors ainsi : si $1 < p < \infty$ et q est l'exposant conjugué de p, alors, pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{1/q}},$$

Lorsque $p = 2$, alors $q = 2$: c'est l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** (due, sous cette forme, à Cauchy en 1821).

Pour montrer l'inégalité de Hölder, on part de l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, pour $a, b \geqslant 0$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p/p$ et du fait que sa dérivée $t \mapsto t^{p-1}$ est la réciproque de la dérivée $t \mapsto t^{q-1}$ de $t \mapsto t^q/q$, comme on peut s'en convaincre en faisant un dessin ; mais on peut le voir aussi simplement, par exemple en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bt$) ; on l'applique avec $a = |x_k|/\|x\|_p$ et $b = |y_k|/\|y\|_q$ (on peut supposer $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$), et on somme. On obtient $\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d'où l'inégalité de Hölder. □

2) Ces exemples se généralisent en dimension infinie.

a) Soit :

$$\boxed{c_0 = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}^*} \; ; \; \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}},$$

et :

$$\boxed{\ell_\infty = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}^*} \; ; \; (x_n)_n \text{ soit bornée}\}};$$

on les munit de la norme définie par :

$$\boxed{\|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |x_n|}.$$

b) Pour $1 \leqslant p < \infty$, on pose :

$$\boxed{\ell_p = \Big\{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}^*} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\Big\}};$$

on le munit de la norme définie par :

$$\boxed{\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}}.$$

Le fait que ℓ_p soit un sous-espace vectoriel de l'espace des suites, et que $\|\,.\,\|_p$ soit une norme sur ℓ_p se déduit de l'inégalité de Minkowski (évidente lorsque $p = 1$), généralisée comme suit :

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\Big)^{1/p},$$

pour tous $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots \in \mathbb{K}$. On l'obtient à partir de la précédente en faisant tendre le nombre de termes vers l'infini : pour tout $N \geqslant 1$, on a $\big(\sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\big)^{1/p}$.

L'inégalité de Hölder se généralise de la même façon. Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\Big)^{1/q}.$$

En particulier, lorsque $x = (x_n)_n \in \ell_p$ et $y = (y_n)_n \in \ell_q$, on a $xy \in \ell_1$ et $\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.

Les espaces ℓ_p sont en fait des cas particuliers des espaces de Lebesgue $L^p(m)$, dont nous rappellerons la définition ci-dessous, correspondant à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$.

I.1.2.2. Espaces de fonctions

1) a) Soit A un ensemble et soit l'espace $\mathscr{F}_b(A)$ l'espace (que l'on note aussi $\ell_\infty(A)$ si l'on veut privilégier l'aspect "famille d'éléments") des fonctions bornées sur A, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si l'on pose :

$$\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|},$$

on a une norme, appelée *norme uniforme*. La topologie associée à cette norme est la *topologie de la convergence uniforme* ; en effet, il est clair que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f.

b) Soit K un espace compact et $\boxed{\mathscr{C}(K)}$ l'espace des fonctions continues sur K (à valeurs scalaires). Toute fonction continue sur un compact étant bornée, $\mathscr{C}(K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}_b(K)$. On le munit usuellement de la norme induite $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Notons que, lorsque $K = [0,1]$, par exemple, on peut aussi munir $\mathscr{C}([0,1])$ de la norme définie par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt\,,$$

qui vérifie $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.

c) Sur l'espace $\mathscr{C}^k([0,1])$ des fonctions k fois continûment dérivables sur $[0,1]$, on peut mettre la norme :

$$\|f\|^{(k)} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}\,.$$

2) *Les espaces de Lebesgue.*

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré ; pour $1 \leqslant p < \infty$, on note $\boxed{\mathscr{L}^p(m)}$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f \colon S \to \mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ telles que :

$$\int_S |f(t)|^p\,dm(t) < +\infty,$$

et l'on pose :

$$\boxed{\|f\|_p = \Big(\int_S f(t)|^p\,dm(t)\Big)^{1/p}}.$$

Notons que $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout.

Théorème I.1.11 (Inégalité de Minkowki). *Soit* $1 \leqslant p < \infty$. *Pour* $f, g \in \mathscr{L}^p(m)$, *on a l'**inégalité de Minkowski** :*

$$\boxed{\Big(\int_S |f+g|^p\,dm\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_S |f|^p\,dm\Big)^{1/p} + \Big(\int_S |g|^p\,dm\Big)^{1/p}}$$

Il en résulte que $\mathscr{L}^p(m)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables et que $\|\,.\,\|_p$ est une *semi-norme* sur $\mathscr{L}^p(m)$. Pour $p = 1$, l'inégalité est évidente.

Preuve. La preuve est la même que pour les suites. On se place dans le cas $p > 1$. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_p > 0$ (car sinon $f = 0$ *m-p.p.* et alors $f + g = g$ *m-p.p.*, ou $g = 0$ *m-p.p.* et alors $f + g = f$ *m-p.p.*). On applique l'inégalité de convexité $[\alpha u + (1-\alpha)v]^p \leqslant \alpha u^p + (1-\alpha)v^p$ avec $\alpha = \|f\|_p/(\|f\|_p + \|g\|_p) \in [0,1]$, $u = |f(t)|/\|f\|_p$ et $v = |g(t)|/\|g\|_p$. Comme $\alpha/\|f\|_p = (1-\alpha)/\|g\|_p = 1/(\|f\|_p + \|g\|_p)$, on a $\Big(\dfrac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p}\Big)^p \leqslant \dfrac{\alpha}{\|f\|_p^p}|f(t)|^p + \dfrac{1-\alpha}{\|g\|_p^p}|g(t)|^p$, d'où, en intégrant :

$$\begin{aligned}\int_S \frac{(|f(t)| + |g(t)|)^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p}\,dm(t) &\leqslant \frac{\alpha}{\|f\|_p^p}\int_S |f(t)|^p\,dm(t) + \frac{1-\alpha}{\|g\|_p^p}\int_S |g(t)|^p\,dm(t)\\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1\,;\end{aligned}$$

cela donne le résultat puisque $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. □

On a vu que $\|\,.\,\|_p$ n'est pas une norme en général, puisque $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout. Si $\mathscr{N}$ désigne l'espace des fonctions mesurables $f\colon S \to \mathbb{K}$ nulles m-presque partout, l'espace-quotient $\boxed{L^p(m) = \mathscr{L}^p(m)/\mathscr{N}}$ est alors normé si l'on pose $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$ (voir l'Exercice 15).

Dans la pratique, on ne fera pas de distinction entre la fonction f et sa classe d'équivalence m-presque partout $\widetilde{f}$, et on écrira donc $f \in L^p(m)$ au lieu de $f \in \mathscr{L}^p(m)$. Toutefois, il faut parfois faire attention, notamment lorsque l'on manipule des quantités non dénombrables de fonctions. Cette distinction peut déjà intervenir pour des questions de mesurabilité. On peut aussi le voir sur l'exemple suivant :

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $[0,1]$; pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a, relativement à la mesure de Lebesgue, $\mathbb{I}_A = 0$ *p.p.* ; donc $\widetilde{\mathbb{I}_A} = \widetilde{0}$. Mais, d'un autre côté, $\sup_{A\in\mathscr{F}} \mathbb{I}_A(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$; donc $(\sup_{A\in\mathscr{F}} \mathbb{I}_A)^{\sim} = \widetilde{\mathbb{I}}$.

Comme pour les suites, l'inégalité de Hölder est *très utile.*

Théorème I.1.12 (Inégalité de Hölder). *Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, on a, pour $f \in \mathscr{L}^p(m)$ et $g \in \mathscr{L}^q(m)$,* ***l'inégalité de Hölder****:*

$$\boxed{\int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^p\,dm\right)^{1/p} \left(\int_S |g|^q\,dm\right)^{1/q}}.$$

Pour $p = q = 2$, on l'appelle **inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\boxed{\int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^2\,dm\right)^{1/2} \left(\int_S |g|^2\,dm\right)^{1/2}},$$

si $f, g \in \mathscr{L}^2(m)$ (elle a été démontrée par Bouniakowski en 1859 et redémontrée par Schwarz en 1885 ; elle généralise l'inégalité pour les sommes démontrée par Cauchy). Elle se démontre de la même façon que pour les sommes, en intégrant au lieu de sommer.

Preuve. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$ car sinon $f = 0$ *m-p.p.* ou $g = 0$ *m-p.p.*, et alors $fg = 0$ *m-p.p.*. On utilise l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec $a = |f(t)|/\|f\|_p$ et $b = |g(t)|/\|g\|_q$. En intégrant, on obtient :

$$\int_S \frac{|f(t)\,g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q}\,dm(t) \leqslant \frac{1}{p}\int_S \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}\,dm(t) + \frac{1}{q}\int_S \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}\,dm(t) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

d'où le résultat. □

Comme application on a le résultat suivant.

Proposition I.1.13. *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré de mesure finie. Alors, pour $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$, on a $\mathscr{L}^{p_2}(m) \subseteq \mathscr{L}^{p_1}(m) \subseteq \mathscr{L}^1(m)$. De plus si $m(S) = 1$ (c'est-à-dire que m est une mesure de probabilité), alors $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$ pour toute $f \in \mathscr{L}^{p_2}(m)$.*

Preuve. On peut supposer $p_1 < p_2$. Posons $p = p_2/p_1$. Comme $p > 1$, on peut utiliser l'inégalité de Hölder :

$$\int_S |f|^{p_1}\,dm \leqslant \left(\int_S 1^q\,dm\right)^{1/q}\left(\int_S (|f|^{p_1})^p\,dm\right)^{1/p} = [m(S)]^{1/q}\left(\int_S |f|^{p_2}\,dm\right)^{1/p};$$

d'où $\|f\|_{p_1} \leqslant [m(S)]^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\|f\|_{p_2}$.

La seconde inclusion s'obtient en remplaçant p_2 par p_1 et en prenant $p_1 = 1$. □

Remarque 1. Au contraire, pour les espaces ℓ_p, on a les inclusions inverses; pour $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$:

$$\ell_1 \subseteq \ell_{p_1} \subseteq \ell_{p_2} \subseteq c_0 \subseteq \ell_\infty.$$

De plus $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1} \leqslant \|x\|_1$ pour tout $x \in \ell_1$.

En effet, si $x \in \ell_{p_2}$, $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} < +\infty$; donc $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2}\right)^{1/p_2} = \|x\|_{p_2}$; donc $\|x\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1}|x_n| \leqslant \|x\|_{p_2}$.

Maintenant, si $x \in \ell_{p_1}$ n'est pas nul, posons $x' = x/\|x\|_{p_1}$. On a $\|x'\|_{p_1} = 1$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^\infty |x'_n|^{p_1} = 1$. Il en résulte que $|x'_n|^{p_1} \leqslant 1$, et donc $|x'_n| \leqslant 1$, pour tout $n \geqslant 1$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $|x'_n|^{p_2} \leqslant |x'_n|^{p_1}$, puisque $p_2 \geqslant p_1$. Il en résulte que $\sum_{n=1} |x'_n|^{p_2} \leqslant \sum_{n=1} |x'_n|^{p_1} = 1$, c'est-à-dire que $\sum_{n=1} |x_n|^{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1}^{p_2}$. Donc $x \in \ell_{p_2}$ et $\|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1}$. □

Remarque 2. Par contre, il est important de noter que $\boxed{\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R})}$ pour tous $p_1 \neq p_2$.

En effet, si $p_1 < p_2$, la fonction définie par $f(t) = 1/t^{1/p_2}$ pour $0 < t \leqslant 1$, et par $f(t) = 0$ ailleurs, est dans $\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car $p_1/p_2 < 1$, mais pas dans $\mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R})$. Si $p_1 > p_2$, alors la fonction définie par $f(t) = 1/t^{1/p_2}$ pour $t \geqslant 1$, et $f(t) = 0$ pour $t < 1$, est dans $\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car cette fois-ci $p_1/p_2 > 1$, mais n'est pas dans $\mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R})$.

I.1.3. Espaces de Banach

Définition I.1.14. *Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite* suite de Cauchy *si :*

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists N \geqslant 1) \qquad k, l \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|x_k - x_l\| \leqslant \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition I.1.15. *On dit qu'un espace normé est* complet *si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle* **espace de Banach** *tout espace normé complet.*

Exemples.

a) Il est immédiat de voir que $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_p)$ est complet pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

b) Les espaces c_0 et ℓ_p, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont complets (*Exercice 3*).

c) $(\mathscr{C}(K), \|\,.\,\|_\infty)$ est complet : toute suite uniformément de Cauchy est uniformément convergente, et si elles sont continues, la limite est continue.

Par contre, $(\mathscr{C}([0,1]), \|\,.\,\|_1)$ n'est pas complet (*Exercice 3*).

d) $(\mathscr{C}^k([0,1]), \|\,.\,\|_\infty)$ n'est pas complet pour $k \geqslant 1$, mais $(\mathscr{C}^k([0,1]), \|\,.\,\|^{(k)})$ est complet.

e) Les espaces de Lebesgue sont complets. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème I.1.16 (Théorème de Riesz-Fisher). *Pour tout espace mesuré $(S, \mathscr{T}, m)$, et pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $L^p(m)$ est un espace de Banach.*

E. Fisher et F. Riesz ont en fait démontré, indépendamment, en 1907 que $L^2([0,1])$ est isomorphe à ℓ_2 ; cela repose essentiellement sur le fait que $L^2([0,1])$ est *complet* (voir le Chapitre 2 sur les espaces de Hilbert) ; c'est pourquoi on donne le nom de Riesz-Fisher à ce théorème, démontré en fait, pour $L^p([0,1])$ et $1 < p < \infty$, par F. Riesz en 1910 (et pour le distinguer des nombreux autres théorèmes dus à F. Riesz).

Preuve. Soit $(F_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(m)$. Choisissons un représentant $f_n \in \mathscr{L}^p(m)$ de F_n.

a) Comme la suite est de Cauchy, on peut construire une sous-suite $(f_{n_k})_j$ (avec $n_1 < n_2 < \cdots$) telle que :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geqslant 1.$$

Posons :

$$\begin{cases} g_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \\ g = \sum_{j=1}^\infty |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|. \end{cases}$$

Ces fonctions sont mesurables et l'on a :

$$\|g_k\|_p \leqslant \sum_{j=1}^k \|\,|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|\,\|_p = \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leqslant \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \leqslant 1.$$

Le **Lemme de Fatou**, appliqué à la suite $(g_k^p)_{k\geqslant 1}$, donne :

$$\int_S g^p\,dm \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_S g_k^p\,dm = \liminf_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p \leqslant 1.$$

La fonction g^p est donc intégrable. En particulier elle est *finie presque partout* ; donc g aussi. Cela signifie que la série $\sum_{k\geqslant 1} \big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big)$ converge absolument, pour presque tout $t \in S$.

Posons alors :

$$f(t) = \begin{cases} f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^\infty \big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big) & \text{si } g(t) < +\infty; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f est mesurable et :

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \quad \text{pour presque tout } t \in S.$$

b) Il reste à voir que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathscr{L}^p(m)$, c'est-à-dire pour la (semi)-norme $\|\,.\,\|_p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite est de Cauchy, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que :

$$n, k \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f_k\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Pour $k \geqslant N$, le **Lemme de Fatou** donne :

$$\int_S |f - f_k|^p \, dm \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_S |f_{n_j} - f_k|^p \, dm \leqslant \varepsilon^p.$$

On en déduit d'abord que $(f - f_k) \in \mathscr{L}^p(m)$, donc que $f = (f - f_k) + f_k \in \mathscr{L}^p(m)$; et ensuite, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, que $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$.

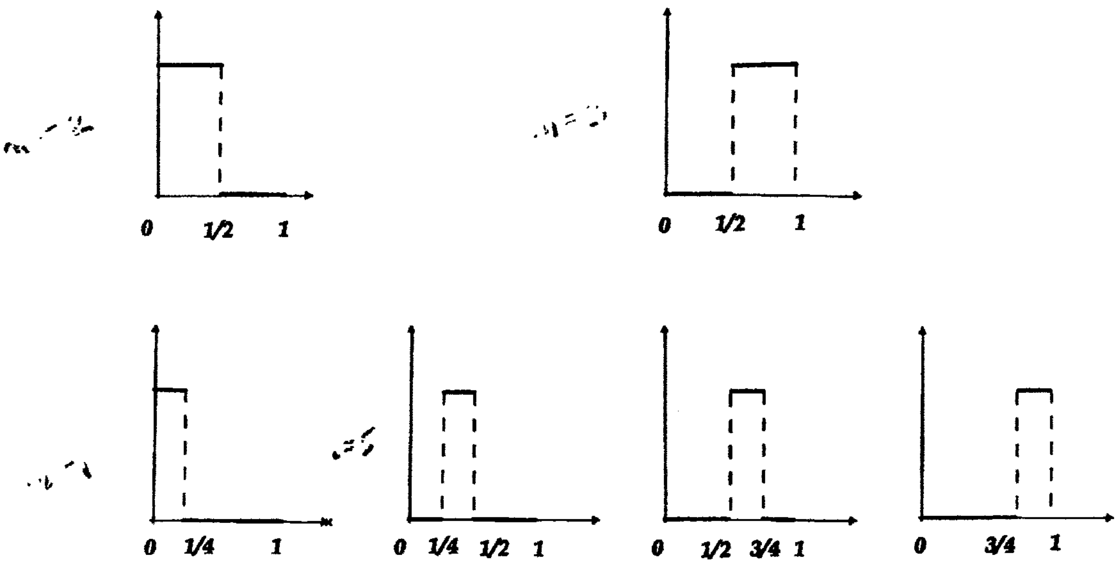
c) Finalement si l'on note $F \in L^p(m)$ la classe d'équivalence m-presque partout de f, on a $\lim_{k\to\infty} \|F - F_k\|_p = \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$. □

Remarque. Notons qu'au passage, on a prouvé le **très important** résultat suivant (on ne fera plus désormais de distinction entre une fonction et sa classe d'équivalence presque partout) :

> **Théorème I.1.17.** *Si* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *dans* $L^p(m)$*, avec* $1 \leqslant p < \infty$*, alors on peut extraire une* **sous-suite** $(f_{n_k})_k$ *qui* **converge presque partout** *vers* f*.*

Remarque. La suite elle-même peut très bien ne converger nulle part.

Par exemple, sur $S =]0,1]$, soit $f_n = \mathbb{1}_{]\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$ lorsque $n = 2^k + l$, $0 \leqslant l \leqslant 2^k - 1$:



Alors, $\|f_n\|_p = \frac{1}{2^{k/p}}$ pour $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1} - 1$; donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $L^p([0,1])$, mais pour aucun $t \in]0,1[$, la suite $\left(f_n(t)\right)_n$ n'est convergente. Toutefois, la sous-suite $(f_{2^k})_{k\geqslant 0}$, par exemple, converge ponctuellement vers 0.

I.1.4. Applications linéaires

Pour les application linéaires, on a un critère très simple, et très utile, de continuité.

Proposition I.1.18. *Soit $(E, \|\,.\,\|_E)$ et $(F, \|\,.\,\|_F)$ deux espaces normés et soit $T\colon E \to F$ une application* **linéaire**. *Alors T est continue si et seulement s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :*

$$\boxed{\|T(x)\|_F \leqslant K\,\|x\|_E\,, \quad \forall x \in E}.$$

Preuve. Il est clair que cette propriété entraîne la continuité de T car on a, grâce à la linéarité :

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leqslant K\,\|x-y\|_E\,, \quad \forall x, y \in E\,;$$

T est donc même lipschitzienne.

Inversement, si T est continue en 0, on a, par définition :

$$(\exists K > 0) \quad \|y - 0\|_E = \|y\|_E \leqslant 1/K \quad \Longrightarrow \quad \|T(y)\|_F = \|T(y) - T(0)\|_F \leqslant 1.$$

Pour tout $x \in E$, non nul, posons $y = \dfrac{1}{K\,\|x\|_E}x$; on a $\|y\|_E = 1/K$ et l'implication ci-dessus donne, grâce à l'homogénéité de T et de la norme :

$$\frac{1}{K\,\|x\|_E}\,\|T(x)\|_F \leqslant 1,$$

d'où $\|T(x)\|_F \leqslant K\,\|x\|_E$. Comme cette inégalité est évidemment vraie pour $x = 0$, cela montre la Proposition I.1.18. □

On a donc $\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$. La proposition suivante est alors évidente :

Proposition I.1.19. *Soit $T\colon E \to F$ une application linéaire continue. Si l'on pose* $\boxed{\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}}$, *alors :*

$$\boxed{\|T(x)\|_F \leqslant \|T\|\,\|x\|_E\,, \quad \forall x \in E};$$

$\|T\|$ est donc la plus petite constante $K \geqslant 0$ apparaissant dans la Proposition I.1.18.

Proposition I.1.20. *On a aussi*

$$\boxed{\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F}.$$

Preuve. Appelons S la première expression et S_1 la suivante. On a bien sûr $S_1 \leqslant S$, et aussi $S \leqslant \|T\|$, puisque $\|T(x)\|_F \leqslant \|T\|$ si $\|x\|_E \leqslant 1$, par définition de $\|T\|$. Il reste à voir que $\|T\| \leqslant S_1$; mais :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leqslant S_1,$$

car $x/\|x\|_E$ est de norme 1. □

Proposition I.1.21. *Soit $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de E dans F. L'application $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$, appelée la* norme opérateur.

Si F est complet, $\mathscr{L}(E,F)$ aussi.

Preuve. Le fait que ce soit une norme est facile à vérifier.

Supposons F complet, et soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E,F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $\big(T_n(x)\big)_n$ est de Cauchy dans F, en vertu de l'inégalité :

$$\|T_n(x) - T_k(x)\|_F \leqslant \|T_n - T_k\| \, \|x\|_E. \tag{I.1}$$

Elle converge donc vers un élément $T(x) \in F$. Il est facile de voir qu'alors $T\colon E \to F$ est linéaire. Elle est continue car :

$$\|Tx\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_F \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\|_E \leqslant \Big(\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\|\Big) \|x\|_E$$

et car $\big(\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\|\big) < +\infty$ puisque toute suite de Cauchy est bornée.

Pour finir, en faisant tendre k vers l'infini dans (I.1), on obtient :

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leqslant \Big(\limsup_{k\to\infty} \|T_n - T_k\|\Big) \|x\|_E$$

pour tout $x \in E$, de sorte que $\|T_n - T\| \leqslant \limsup_{k\to\infty} \|T_n - T_k\|$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque $(T_n)_n$ est de Cauchy. Donc $(T_n)_n$ converge vers T pour la norme opérateur. □

En particulier, si $F = \mathbb{K}$, $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est **toujours complet.**

Définition I.1.22. *$\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est noté E^* et est appelé le* **dual de** *E. C'est toujours un espace de Banach.*

Notons que E^* est le dual *topologique* de E, et est strictement plus petit que le dual *algébrique*, l'espace de toutes les formes linéaires, de E, du moins si E est de dimension infinie (voir l'Exercice 8).

La norme de $\varphi \in E^*$ est donc définie par :

$$\boxed{\|\varphi\| = \|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|}.$$

Notation. On utilise souvent la notation $\boxed{\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x)}$.

Définition I.1.23. *Si l'application linéaire $T\colon E \to F$ est bijective continue* *__et__* *si $T^{-1}\colon F \to E$ est continue, on dit que T est un* isomorphisme *(d'espaces normés) entre E et F.*

On dit que E et F sont isomorphes *s'il existe un isomorphisme entre E et F ; on dit qu'il sont* isométriques *s'il existe un isomorphisme isométrique $T\colon E \to F$.*

Notons que dire qu'une application $T\colon E \to F$ est isométrique signifie que l'on a $\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|x_1 - x_2\|_E$ pour tous $x_1, x_2 \in E$. Lorsque T est linéaire, cela s'exprime par $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; T est donc en particulier de norme $\|T\| = 1$. Toute isométrie est injective ; dire qu'elle est bijective équivaut donc à dire qu'elle est surjective. Dans ce cas, T^{-1} est aussi une isométrie ; elle est donc automatiquement continue.

Dire que T est un isomorphime signifie que T est linéaire bijective et qu'il existe deux constantes $0 < \alpha < \beta < \infty$ telles que

$$\boxed{\alpha\,\|x\|_E \leqslant \|Tx\|_F \leqslant \beta\,\|x\|_E} \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

En effet, si T est un isomorphisme, la continuité de T^{-1} permet d'écrire : $\|T^{-1}y\|_E \leqslant \|T^{-1}\|\,\|y\|_F$ pour tout $y \in F$, soit $\|x\|_E \leqslant \|T^{-1}\|\,\|Tx\|_F$ pour tout $x \in E$. On a donc la double inégalité, avec $\alpha = 1/\|T^{-1}\|$ et $\beta = \|T\|$. Inversement, si on a cette double inégalité, alors T est continue et $\|T\| \leqslant \beta$ et T^{-1} est continue et $\|T^{-1}\| \leqslant 1/\alpha$, puisque $\alpha\,\|T^{-1}y\|_E \leqslant \|y\|_F$ pour tout $y \in F$.

On peut aussi remarquer que l'inégalité de gauche entraîne l'injectivité de T.

I.1.5. Normes équivalentes

Définition I.1.24. *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$. On dit que $|||\,.\,|||$ est* plus fine *que $\|\,.\,\|$ (et que $\|\,.\,\|$ est* moins fine *que $|||\,.\,|||$) s'il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\|x\| \leqslant K\,|||x|||, \quad \forall x \in E.$$

Cela équivaut à dire que l'**application identité** :

$$id_E\colon (E, |||\,.\,|||) \to (E, \|\,.\,\|)$$

est continue.

Cela équivaut encore à dire que :

$$B_{|||\,.\,|||}(0, r/K) \subseteq B_{\|\,.\,\|}(0, r);$$

les boules pour $|||\,.\,|||$ sont donc "plus petites" que les boules pour $\|\,.\,\|$: elles séparent mieux les points ; plus précisément, la topologie définie par $|||\,.\,|||$ est plus fine que celle définie par $\|\,.\,\|$ (il y a plus d'ouverts).

Exemple. Dans $\mathscr{C}([0,1])$, la norme $\|\,.\,\|_\infty$ est plus fine que la norme $\|\,.\,\|_1$.

Définition I.1.25. *On dit que deux normes $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$ sur l'espace vectoriel E sont* équivalentes *s'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que :*

$$K_1 \|x\| \leqslant |||x||| \leqslant K_2 \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

En d'autres termes, chacune est plus fine que l'autre.

Cela revient à dire que l'**application identité** id_E réalise un isomorphisme de E sur lui-même (ou plutôt de E muni de $\|\,.\,\|$ sur E muni de $|||\,.\,|||$). Cela revient aussi à dire que $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$ définissent la <u>même topologie</u> sur E.

Exemples.

1) Dans $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\,.\,\|_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont équivalentes :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty.$$

On va voir qu'en fait **toutes** les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes entre-elles.

2) Dans $\mathscr{C}([0,1])$, les normes $\|\,.\,\|_\infty$ et $\|\,.\,\|_1$ ne sont pas équivalentes, comme on peut le vérifier facilement (voir par exemple l'Exercice 2).

I.2. Espaces vectoriels normés de dimension finie

I.2.1. Equivalence des normes

Théorème I.2.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre-elles.*

Preuve. 1) Soit $\|\,.\,\|$ une norme arbitraire sur E. Nous allons montrer qu'elle est équivalente à une norme particulière sur E, de sorte que, par transitivité, deux normes arbitraires seront équivalentes.

2) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Si $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, on pose :

$$|||x||| = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}.$$

Ainsi, $(E, |||\,.\,|||)$ est isométrique à $(\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_\infty) = \ell_\infty^n(\mathbb{K})$, par l'application

$$\begin{array}{llll} V: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & a = (a_1, \ldots, a_n) & \longrightarrow & V(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k e_k. \end{array}$$

On a de plus :

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \, \|e_k\| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|\Big) . \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k| = K \,|||x|||\,.$$

3) Cela signifie que l'application identité $id_E\colon (E, |||\,.\,|||) \to (E, \|\,.\,\|)$ est continue. Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccc} N\colon & (E, |||\,.\,|||) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

est aussi continue, par la Proposition I.1.10.

4) Soit :

$$S_n = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \,;\; \|a\|_\infty = 1\}.$$

C'est une partie fermée et bornée, donc **compacte**, de $\mathbb{K}^n$ (on notera que la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définit la topologie usuelle sur $\mathbb{K}^n$). Donc :

$$S = \{x \in E \,;\; |||x||| = 1\}$$

est une partie compacte de $(E, |||\,.\,|||)$ (par isométrie : $S = V(S_\infty)$).

5) Il en résulte qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $\|x_0\| = N(x_0) = \inf_{x\in S} N(x) = \inf_{x\in S} \|x\|$. Comme $x_0 \neq 0$ (puisque $|||x_0||| = 1$), on a $c = \|x_0\| > 0$. Cela signifie que :

$$(\forall x \in S) \qquad \|x\| \geqslant c\,.$$

Par homogénéité (pour tout $x \neq 0$, $x' = x/|||x||| \in S$), on obtient :

$$(\forall x \in E) \qquad \|x\| \geqslant c\,|||x|||\,,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. Au passage, on a montré :

Corollaire I.2.2. *Tout espace normé de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, muni de l'une de ses normes usuelles.*

Il en résulte :

Corollaire I.2.3. *Si E est un espace normé de dimension finie, ses parties fermées bornées sont compactes.*

Corollaire I.2.4.

1) *Tout espace normé de dimension finie est complet.*

2) *Tout sous-espace vectoriel* de dimension finie *dans un espace normé est* fermé *dans cet espace.*

3) *Si E est un espace normé* de dimension finie, *alors toute application linéaire $T\colon E \to F$ dans un espace normé arbitraire est* continue.

Preuve. 1) résulte immédiatement du Corollaire I.2.2, et 2) de ce que tout sous-espace complet est fermé. Pour le 3), il suffit de remarquer que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, et $|||\,.\,|||$ la norme associée comme dans la preuve du Théorème I.2.1, alors, pour $x = \sum_{k=1}^n a_k e_k \in E$, on a :

$$\|T(x)\|_F \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \|T(e_k)\|_F\Big) \max_{k\leqslant n} |a_k| = C\,|||x||| \leqslant C\,K\,\|x\|_E,$$

puisque $|||\,.\,|||$ et $\|\,.\,\|_E$ sont équivalentes. □

On fera attention, par contre, que si c'est l'espace d'arrivée qui est de dimension finie, la continuité n'est pas automatique (puisqu'il existe des formes linéaires non continues, si E est de dimension infinie : Exercice 8).

I.2.2. Compacité des boules

Nous avons vu dans la preuve du Théorème I.2.1 que le point essentiel (*via* le Corollaire I.2.3) est que les parties fermées bornées d'un espace normé de dimension finie sont compactes. Notons qu'il est équivalent de dire que toutes les boules fermées sont compactes. Nous allons voir que cela n'arrive en fait qu'en dimension finie.

Théorème I.2.5 (Théorème de Riesz, 1918). *Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x_0, r)$, de rayon $r > 0$, alors il est de dimension finie.*

On en déduit que dans un espace de dimension infinie, les compacts sont "très minces" :

Corollaire I.2.6. *Si E est un espace normé de* dimension infinie, *alors tout compact de E est d'intérieur vide.*

En effet, si K est un compact d'intérieur non vide, il contient une boule fermée de rayon > 0, qui est donc compacte, et donc E est de dimension finie.

Notons que si une boule est compacte, c'est forcément une boule fermée. D'autre part, si *une* boule, de rayon > 0, est compacte, alors *toutes* les boules fermées le sont, puisqu'elles sont homéomorphes entre-elles (celles de rayon nul étant de toute façon compactes). Il suffit donc de montrer que si E est de dimension infinie, alors sa boule-unité B_E n'est pas compacte. Pour cela, on utilisera un lemme.

Lemme I.2.7 (Lemme de Riesz). *Soit F un sous-espace vectoriel* **fermé** *d'un espace normé E, qui n'est pas E tout entier. Alors, pour tout nombre δ tel que $0 < \delta < 1$, il existe $x \in E$ tel que :*

$$\begin{cases} \|x\| = 1 \\ \operatorname{dist}(x, F) \geqslant 1 - \delta. \end{cases}$$

Rappelons que :

$$\operatorname{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Si F est de dimension finie, un argument de compacité permet de montrer qu'en fait on peut choisir un tel $x \in E$, de norme 1, avec $\operatorname{dist}(x, F) = 1$, mais nous n'en aurons pas besoin. Dans le cas de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|_2)$, il suffit de prendre x de norme 1 et orthogonal à F (car alors, pour tout $y \in F$, on a $\|x-y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$, par le *Théorème de Pythagore* ; donc $\operatorname{dist}(x, F) \geqslant \|x\|_2 = 1$, d'où l'égalité car $\|x\| \geqslant \operatorname{dist}(x, F)$, puisque $0 \in F$). C'est pourquoi ce lemme est parfois appelé *Lemme de la quasi-perpendiculaire.*

Preuve du Théorème de Riesz. Soit E un espace normé de dimension infinie.

Fixons un nombre $\delta \in]0, 1[$; par exemple $\delta = 1/2$.

Partons d'un $x_1 \in E$, de norme 1, et prenons pour F le sous-espace vectoriel F_1 engendré par x_1. Comme il est de dimension 1, il est fermé, et n'est pas égal à E, puisque E est de dimension infinie. Le lemme donne un $x_2 \in E$, de norme 1 tel que :

$$\|x_2 - x_1\| \geqslant \operatorname{dist}(x_2, F_1) \geqslant 1/2.$$

Prenons ensuite pour F le sous-espace vectoriel F_2 engendré par x_1 et x_2. Il est de dimension 2 (car $x_2 \notin F_1$), et est donc fermé, et différent de E ; il existe donc $x_3 \in E$, de norme 1 tel que :

$$\|x_3 - x_1\| \text{ et } \|x_3 - x_2\| \geqslant \operatorname{dist}(x_3, F_2) \geqslant 1/2.$$

Comme E est de dimension infinie, on peut itérer le procédé indéfiniment. On obtient une suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ de vecteurs de norme 1 telle que :

$$\|x_k - x_l\| \geqslant 1/2, \quad \forall k \neq l.$$

Cette suite ne peut avoir aucune sous-suite convergente. Comme elle est contenue dans la boule-unité de E, cette boule n'est pas compacte. □

Remarque. On a en fait démontré un peu plus que ce qui était énoncé, à savoir que si E est de dimension infinie, sa ***sphère unité*** S_E n'est pas compacte (noter que S_E est fermée dans B_E ; donc si B_E est compacte, S_E aussi).

Preuve du lemme. Comme $F \neq E$, on peut trouver $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$. Comme F est fermé, on a :

$$d = \operatorname{dist}(x_0, F) > 0.$$

Comme $0 < \delta < 1$, on a $\dfrac{d}{1-\delta} > d$ et l'on peut donc trouver un $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| \leqslant d/(1-\delta)$. Il ne reste plus qu'à "corriger" x_0 par y_0 et à normer ce vecteur : soit $x = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$; c'est bien un vecteur de norme 1 et, comme $y_0 + \|x_0 - y\|\, y \in F$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \big\|(x_0 - y_0) - \|x_0 - y_0\|\, y\big\| \\ &\geqslant \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \operatorname{dist}(x_0, F) = \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant 1 - \delta, \end{aligned}$$

pour tout $y \in F$. □