Introduction aux systèmes dynamiques

Allal MEHAZZEM

Centre Universitaire Abdlehafidh Boussouf Mila

2020 2021

Généralités

Définitions

Introduisons ici quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

Définition 1 (Equation differnetielle normale)
Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \to x(t)$ et ses dérivées$x\prime, x", ..., x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t; x\prime, x", ..., x^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle Ide $\mathbb{R}$ (Ipeut être $\mathbb{R}$ tout entier).
La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ où N sera le plus souvent égal à $1, 2$ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (equation diffrentielle normale)
On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t; x\prime, x", ..., x^{(n-1)}). \qquad (1.2)$$

Définition 3 (equation differentielle autonome)
On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(x\prime, x", ..., x^{(n-1)}). \qquad (1.3)$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.
Remarque:
Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires
ainsi que leur stabilité.

Exemple

Equation du premier ordre sous la forme normale :

$$x' = f(t; x)$$

Equation du premier ordre autonome :

$$x' = f(x)$$

Equation différentielle linéaire

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 4 (EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE)
Une EDO de type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+...+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=g(t)$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

Exemple

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre (onjustifiera la réponse):

$i.\ (x-t)dt+4tdx=0$ $\qquad ii.\ x''-2x'+x=0$ $\qquad iii.\ \dfrac{d^3x}{dt^3}+t\dfrac{dx}{dt}-5x=e^t$

$iv.\ (1-x)x'+2x=e^t$ $\qquad v.\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+\sin x=0$ $\qquad vi.\ \dfrac{d^4x}{dt^4}+x^2=0$

textbf Cadre général

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, d'intérieur non vide, et $t_0 \in I$. Soit E un espace de Banach, D un ouvert connexe de E. On considère une application

$$f : D \times I \to E$$

et un point $y_0 \in D$.

Définition 1.1 On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une application $y : J \to D$ telle que y soit dérivable et satisfait pour tout $t \in J$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t,\ y(t))\ , \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Remarque 1.2 La plus souvent, on considérera que $E = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. On supposera aussi que f est au moins continue. Une formulation équivalente de () est donnée par

$$\forall t \in J,\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ y(s))\mathrm{d}s.$$

Cadre général

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, d'intérieur non vide, et $t_0 \in I$. Soit E un espace de Banach, D un ouvert connexe de E. On considère une application

$$f : D \times I \to E$$

et un point $y_0 \in D$.

Définition 1.1 On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une application $y : J \to D$ telle que y soit dérivable et satisfait pour tout $t \in J$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t,\ y(t))\ , \\ y(t_0) & = & y_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Remarque 1.2 La plus souvent, on considérera que $E = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. On supposera aussi que f est au moins continue. Une formulation équivalente de () est donnée par

$$\forall t \in J,\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ y(s))\mathrm{d}s.$$

Définition 1.3 On donne maintenant quelques définitions :
1. Le couple $(J,\ y)$ est appelé solution locale si
$t_0 \in J \subset I, y \in C^1(J), J$ est un voisinage de t_0 dans I, et (1) est satisfaite pour tout $t \in J$.
2. Soient $(J_1,\ y_1)$ et $(J_2,\ y_2)$ deux solutions locales. On dit que $(J_1,\ y_1)$ prolonge $(J_2,\ y_2)$ si
$\begin{cases} J_2 \subset J_1, \\ y_1|_{J_2} = y_2. \end{cases}$
3. Une solution locale $(J,\ y)$ est appelée solution maximale si pour tout prolongement $(\overline{J}, \overline{y})$ de $(J,\ y)$, on a $\tilde{J} = J$ et ?=y.

4. Une solution locale $(J,\ y)$ est appelée solution globale si $J = I$.
Remarque 1.4 On peut immédiatement faire les remarques suivantes:

– Toute solution globale est solution maximale.

– Soient $t_i, i = 1, \ . \ . \ . \ , 4$ tels que $t_1 < t_0 < t_2$ et $t_3 < t_2 < t_4$, et soient $(J_1,\ y_1)$ et $(J_2,\ y_2)$ deux solutions locales telles que
$[t_1,\ t_2] \subset J_1$, et $\left\{ \begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & f(t,\ y_1(t))\ , \\ y_1(t_0) & = & y_0. \end{array} \right.$
et
$[t_3,\ t_4] \subset J_2$, et $\left\{ \begin{array}{lcl} y_2'(t) & = & f(t,\ y_2(t))\ , \\ y_2(t_2) & = & y_1(t2). \end{array} \right.$
Alors le couple $(J,\ y)$ défini par
$J = [t_1,\ t_4]$, et
$y = \left\{ \begin{array}{l} y_1 \text{ sur } [t_1,\ t_2], \\ y_2 \text{ sur } [t_2,\ t_4], \end{array} \right.$
est une solution locale, prolongement de $([t_1,\ t_2],\ y_1)$ (pas forcément de $(J_2,\ y_2)$!!). Le résultat suivant est immédiat.

Lemme 1.5 *Si f est de classe C^k sur $I \times D$, alors pour toute solution locale $(J,\ y)$, y est de classe C^{k+1} sur J.*

1.2 **Exemples**

1. Le problème

$$\begin{cases} \dot{y} & = & -2ty^2 \\ y(0) & = & 1 \\ I & = & \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution globale $(\mathbb{R},\ \frac{1}{1+t^2})$.

2. Le problème

$$\begin{cases} \dot{y} & = & +2ty^2 \\ y(0) & = & 1 \\ I & = & \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution maximale $(]-1,\ +1[,\ \frac{1}{1-t^2})$

3. On considére le problème

$$\begin{cases} \dot{y} & = & -y^2 \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Avec $I = \mathbb{R}_+$ le problème admet une solution globale $y(t) = \frac{1}{1+t}$.
Avec $I = \mathbb{R}$ le problème admet une solution maximale
$(]-1,\ +\infty[,\ \frac{1}{1+t})$ qui est non globale.

4. Le problème

$$\begin{cases} \dot{y} & = & y^2 \\ y(0) & = & 1 \\ I & = & \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une solution maximale $(]-\infty,\ 1[,\ \frac{1}{1-t})$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section nous allons présenter le théorème fondamentale d'existence et d'unicité pour le système autonome non-linéaire

$$\dot{x} = f(x)$$

pour la preuve de ce théorème nous allons utiliser la méthode des approximations successives qui va servir en même temps à montrer la continuité et la différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres.

Définition: Soit $\mathbb{E}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ est dite Lipschitzienne sur $\mathbb{E}$ s'il existe une constante positive K telle que pour tout $x, y \in \mathbb{E}; |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
La fonction f est dite localement Lipschitzienne sur $\mathbb{E}$ si pour chaque point $x_0 \in \mathbb{E}$ il existe un ϵ-voisinage de $x_0, N_\epsilon(x_0) \subset \mathbb{E}$ et une constante $K_0 > 0$ telle que pour tout $x, y \in N_\epsilon(x_0)$:
$|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|$.
(ϵ-voisinage de $x_0 \in R^n$, est une boule ouverte de rayon ϵ i.e
$N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - x_0| < \epsilon\}$)
Lemme: Soit $\mathbb{E}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ Si $f \in C^1(\mathbb{E})$ alors $f$est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{E}$.

Théorème . (Théorème fondamentale d'existence et d'unicité)
Soit E un ouvert de R^n Contenant x_0 et supposons que $f \in C^1(E)$, alors il existe $a > 0$ tel que
le problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x) \; ,$$

$$x(0) \; = x_0,$$

admet une solution unique sur l'intervalle $[-a, \; a]$.

Dépendance aux conditions initiales et aux paramètres

Dans cette section nous allons étudier la dépendance de la solution du problème de Cauchy () aux conditions initiales y et aux paramètres $\mu \in R^m$ (i.e étudier la différentiabilité de la solution $u(t,\ x_0,\ \mu)$ par rapport à y et à μ)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\ \mu) \\ x(0) & = & y \quad (1.13) \end{array}$$

Lemme : **(Gronwall)** Supposons que $g(t)$ est une fonction continue positive et satisfaisant

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s)ds$$

pour tout $t \in [0,\ a]$ telle que C et K sont des constantes positives. Alors pour tout $t \in [0,\ a]$,

$$g(t) \leq Ce^{Kt}$$

Démonstration. Soit $G(t) = c + K \int_0^t g(s)ds$ pour $t \in [0,\ a]$. Clairement $G(t) \geq g(t)$ et $G(t) > 0$ pour tout $t \in [0,\ a]$. Alors $G'(t) = Kg(t)$ d'où

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{Kg(t)}{G(t)} \leq \frac{KG(t)}{G(t)} = K$$

pour tout $t \in [0,\ a]$. Donc

$$\frac{d}{dt}\ln(G(t)) \leq K$$

$$\ln(G(t)) \leq Kt + \ln(G(0))$$

$$G(t) \leq G(0)e^{Kt}$$

$$g(t) \leq Ce^{Kt}$$

$\square$

et après integration

ou

pour tout $t \in [0,\ a]$, ce qui implique

pour tout $t \in [0,\ a]$.

Théorème: (Dépendance aux conditions initiales)
Soit E un ouvert de R^n contenant x_0 et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ le problème à condition initiale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= y \end{aligned}$$

admet une solution unique $u(t,\ y)$ avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a,\ a] \times N_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de plus pour chaque $y \in N_\delta(x_0)$, $u(t,\ y)$ est deux fois continument différentiable par rapport à $t \in [-a,\ a]$.

Théorème . (Dépendanoe aux paramètres)
Soit E un ouvert de R^{n+m} contenant $(x_0,\ \mu_0)$ et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ et $\mu \in N_\delta(\mu_0)$ le problème aux conditions initiales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) \\ x(0) &= y \end{aligned}$$

admet une solution unique $u(t,\ y,\ \mu)$ avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a,\ a] \times N_\delta(x_0)_\delta(\mu_0)$
Ce théorème ressort directement du théorème précédant en remplaąant les vec-
teurs $x_0, x, \dot{x}$ et y par $(x_0,\ \mu_0), (x,\ \mu), (x,\ 0)$ et $(y,\ \mu)$ respectivement.

Systèmes différentiels linéaires

De nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser en première approximation par des systèmes différentiels linéaires. D'autre part on sait résoudre complètement les systèmes linéaires à coefficients constants. Ceci a donné une grande importance pratique à de tels systèmes.

Généralités

Un système differentiel linéaire du premier ordre dans R^n est une équation de la

$$x = A(t)x + B(t)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$est la fonction inconnue
$A(t) = (a_{i,j}(t)_{1 \leq i,j \leq n}) \in M_n(R)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues données

Théorème : Si la fonction matricielle A et la fonction vectorielle B sont continues sur un intervalle I alors le problème aux conditions initiales

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$
$$x(t_0)=x_0,$$

avec $t_0 \in I$ et x_0 est un vecteur constant, admet une solution unique sur tout
Pour la démonstration il suffit de voir que la fonction
$F(t,\ x) = A(t)x + B(t)$ est
l'intervalle I.
continue sur I est lipschitzienne de rapport
$K = \|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$.
Pour résoudre le système non-homogène on a besoin d'abord de résoudre le cas homogène associés.

Cas d'un système homogène $\dot{x} = A(t)x$
Concéderons le système homogène associé au système

$$\dot{x} = A(t)x$$

$$x(t_0)=x_0,$$

Soit S l'ensemble des solutions maximales. Alors pour tout $x, y \in \mathrm{S}$ et tout $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in \mathrm{S}$, donc S est un sous espace vectoriel.
Corollaire . L'ensemble S des solutions maximales est un sous espaoe vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.

Cas d'un système non-homogène $\dot{x} = A(t)x + B(t)$
Revenons au système plus général , il existe au moins une solution maximale y. Si x est une solution quelconque, alors $z = x - y$ satisfait l'équation homogène () , et réciproquement. Par conséquent, l'ensemble des solutions maximales estdonné par:

$$y + \mathrm{S} = \{y + z; z \in \mathrm{S}\},$$

où S est l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée. L'ensemble $y + \mathrm{S}$ des solutions maximales est un translate de S, c'est donc un espace affine de dimension n sur $\mathbb{R}$, admettant S comme direction vectorielle.

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Le cas homogène

Concéderons le système homogène à coefficients constants

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(0) = x_0$$

Utilisant les itérations de Picard on obtient

$x_0(t) = x_0$
$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_0(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_{t_0}^{t} ds = x_0 + tAx_0$
$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_1(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_{t_0}^{t} ds + A^2x_0 \int_{t_0}^{t} ds =$
$x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0.$

Par induction

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

passant à la limite on obtient

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

Dans le cas unidimensionnel cette série n'est autre que la fonction exponentielle donc nous écrivons

$$x(t) = exp(tA)x_0$$

et on définit la matrice exponentielle par

$$exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i$$

Lemme : Soit A une matrioe carrée, alors

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

Démonstration. Comme A commute avec elle même alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{At}\frac{e^{Ah} - I}{h} \\
&= e^{At} \lim_{h\to 0} \lim_{k\to +\infty} (A + \frac{A^2 h}{2!} + \ \ldots\ + \frac{A^k h^{k-1}}{k!}) \\
&= e^{At} \lim_{k\to +\infty} \lim_{h\to 0} (A + \frac{A^2 h}{2!} + \ + \frac{A^k h^{k-1}}{k!}) \\
&= Ae^{At},
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème: Soit A une matrioe carrée. Alors pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné le problème aux conditions initiales () admet une solution unique donnée par

$$x(t) = e^{Atx_0}.$$

Démonstration. $\Rightarrow$) D'après le lemme () si $x(t) = e^{At}x_0$ alors $x'(t) = Ae^{At}x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x(0) = Ix_0 = x_0$. Donc $x(t) = e^{At}x_0$ est solution de () $\Leftarrow$) Supposons que $x(t)$ est une solution de () et posons $y(t) = e^{-At}x(t)$, alors d'après le lemme () on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \end{aligned}$$

$= 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$(car A et e^{-At} commutent)
donc $y(t)$ est constant par suite $y(t) = y(0) = x(0)$. Alors toute solution de () est donnée par

$$x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$$