REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdel Hafid Boussouf – Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département des Sciences et Techniques

Filière: Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Méthodes numériques I
Méthodes des différences finies

Responsable du module : Dr. BOUCHOUCHA Abd El malik

Année Universitaire 2020-2021

Sommaire **Page**

Chapitre I

FORMULATION MATHEMATIQUE DE L'EQUATION DE LA CONDUCTION DE CHALEUR UNIDIMENSIONNELLE (1-D) ET BIDIMENSIONNELLE (2-D)

I.1 Introduction

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres…). Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur.

I. 2 Equation de la conduction de chaleur unidimensionnelle (1-D)

I. 2.1 Equation de la conduction de chaleur dans une paroi plane large :

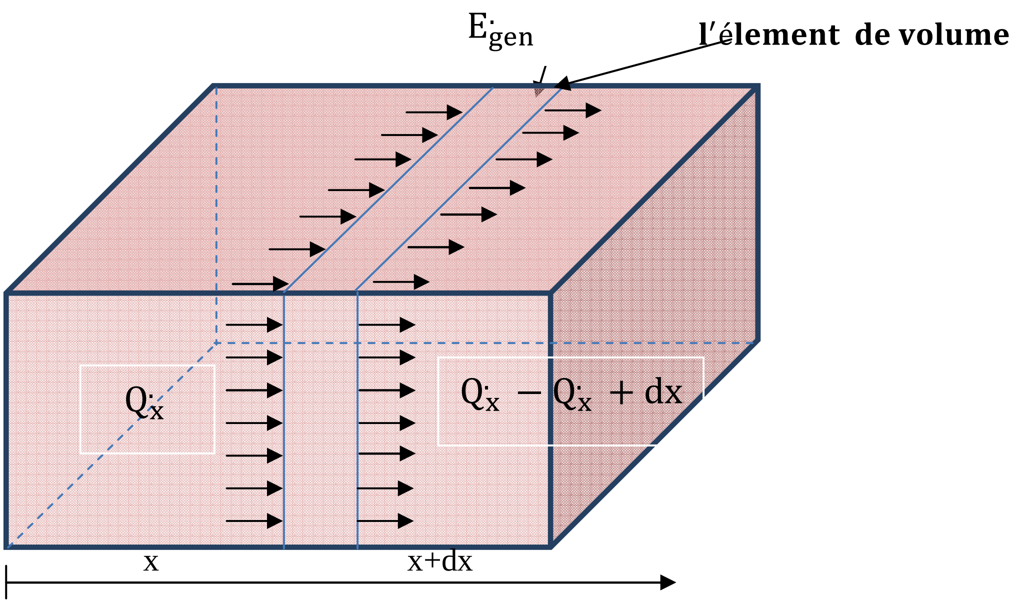


Fig I.1 conduction de chaleur unidimensionnelle à travers un élément de volume dans une paroi plane large.

Nous considérons un élément mince d'épaisseur dx dans une paroi plane et la large (Fig I-1) supposé que la densité ρ, de la paroi la chaleur spécifique est C, et la surface de la paroi normale à la direction du transfert de chaleur est A. En l'absence de génération de chaleur, un bilan énergétique sur cet élément mince d'épaisseur Δx pendant un petit intervalle de temps Δt peut être exprimé comme

$$\begin{pmatrix}\text{Taux de la conduction}\\ \text{de}\\ \text{chaleur}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Taux de la conduction}\\ \text{de}\\ \text{chaleur à x + dx}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Taux de generation}\\ \text{de}\\ \text{chaleur à l'intérure}\\ \text{de}\\ \text{l'element}\\ \text{de voulume}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{Taux de changement}\\ \text{de}\\ \text{l'énerge contenue dans}\\ \text{l'élement de volume}\end{pmatrix}$$

$$\dot{Q_x} - \dot{Q_x} + dx + \dot{E_{gen}}.\text{elment} = \frac{\Delta E_{\text{élément}}}{\Delta t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(I.1)$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho.dx.A.C.(T_{t+\Delta t}T_t) \dots (I.2)$$

$$\Delta E_{\text{élément}} = \dot{e}_{\text{gen élément}}.V_{\text{élément}} = \dot{e}_{\text{gen élément}}.A.dx \dots\dots\dots\dots\dots (I.3)$$

En remplaçant $(I.2)$et $(I.3)$dans l'equation $(I.1)$

$$\dot{Q_x} - \dot{Q_x} + dx + \dot{e}_{\text{gen élément}}.A.dx = \rho.dx.A.C.\left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt}\right) \dots\dots\dots.(I.4)$$

$\dot{e}_{gen} = \dot{e}_{\text{gen élément}}$

$$\Delta E_{\text{élément}} = \int \dot{e_{gen}}.A.dr \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(I.5)$$

$$\dot{Q_x} - \dot{Q_x} + dx + \dot{e_{gen}}.A.dx = \rho.dx.A.C.\left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1.1)$$

$$-\dot{Q_x} + \dot{Q_x} + dx + \dot{e_{gen}}.A.dx = \rho.dx.A.C.\left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1.1)$$

On divise l'équation (1.4) par A.dx

$$-\frac{1}{A}\frac{Qx + dx - Qx}{dx} + \dot{e_{gen}} = \rho.C.\left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (I.6)$$

$$\frac{Qx + dx - Qx}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-K.A\frac{\partial T}{\partial x}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(I.7)$$

La loi de fourrier de la conduction de chaleur

Limite dx→ 0

En prenant, dx→ 0 , dt→ 0 0 l'équation $(I.6)$devient

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{(T_{t+\Delta t} - T_t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{A}.\frac{\partial}{\partial x}\left(K.A\frac{\partial T}{\partial x}\right) + = \dot{e}_{gen} = \rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(I.8)$$

En notant que la surface de la paroi plane est constante. L'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle (1-D) dans une paroi plane devient

*__Conductivité thermique variable__

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K.A\frac{\partial T}{\partial x}\right) + = \dot{e}_{gen} = \rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (I.9)$$

*Conductivité thermique constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} + \frac{\dot{e}_{gen}}{K} = \frac{\rho.C}{k}.\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} + \frac{\dot{e}_{gen}}{K} = \frac{1}{\alpha}.\frac{\partial T}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.10)$$

*__Régime permanent :__

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 T}{\partial^2 t} + \dfrac{\dot{e}_{gen}}{K} = 0 \\ \quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial^2 t} = 0 \end{array}\right. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.11)$$

*__Régime transitoire pas de génération de chaleur__

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.12)$$

Génération de chaleur ($\dot{e}_{gen}$ =0)

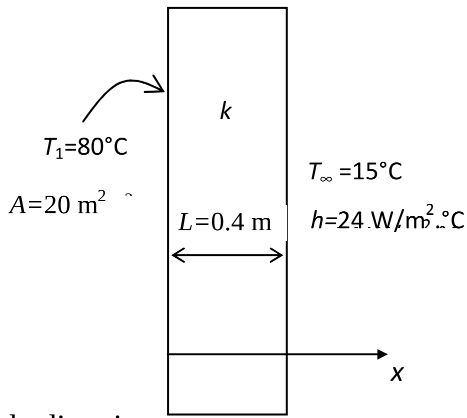
*__Régime permanent pas de génération de chaleur__

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.13)$$

($\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \dot{e}_{gen}$ =0)

Exemple (I.1)

Une paroi plane large est soumise à une température spécifiée sur la surface gauche et à une convection sur la surface droite. La formulation mathématique, la variation de la température et le taux de transfert de chaleur doivent être déterminés pour un transfert de chaleur unidimensionnel régulier.



Hypothèses

1- La conduction thermique est stable et unidimensionnelle. .

2 -La conductivité thermique est constante.

3- Il n'y a pas de génération de chaleur.

Propriétés La conductivité thermique est donnée comme étant k = 2,3 W / m. ° C.

En prenant la direction normale à la surface du mur comme étant la direction x avec x = 0 à la surface gauche, la formulation mathématique de ce problème peut être exprimée comme suit:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \text{Et} \qquad T(0) = T_1 = 80°\text{C} \qquad -k\frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$$

(b) Intégration de l'équation différentielle deux fois par rapport aux rendements x

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \qquad\qquad T(x) = C_1x + C_2$$

où et C_2 sont des constantes arbitraires. L'application des conditions aux limites donne

$x = 0$: $\quad T(0) = C_1 \times 0 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_1$

$x = L$: $\quad -kC_1 = h[(C_1L + C_2) - T_\infty] \;\rightarrow\; C_1 = -\frac{h(C_2 - T_\infty)}{k + hL} \;\rightarrow\; C_1 = -\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL}$

En se substituant à la solution générale, la variation de température est déterminée comme étant

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL}x + T_1 \\ &= -\frac{(24\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C})(80 - 15)°\mathrm{C}}{(2.3\ \mathrm{W/m \cdot °C}) + (24\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C})(0.4\ \mathrm{m})}x + 80°\mathrm{C} \\ &= 80 - 131.1x \end{aligned}$$

(c) Le taux de conduction thermique à travers le mur est

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{wall}} &= -kA\frac{dT}{dx} = -kAC_1 = kA\frac{h(T_1 - T_\infty)}{k + hL} \\ &= (2.3\ \mathrm{W/m \cdot °C})(20\ \mathrm{m^2})\frac{(24\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C})(80 - 15)°\mathrm{C}}{(2.3\ \mathrm{W/m \cdot °C}) + (24\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C})(0.4\ \mathrm{m})} = \mathbf{6030\ W} \end{aligned}$$

Notez que dans des conditions stables, le taux de conduction thermique à travers un mur est constant.

I.2.2 Equation de la conduction de chaleur dans un cylindre long

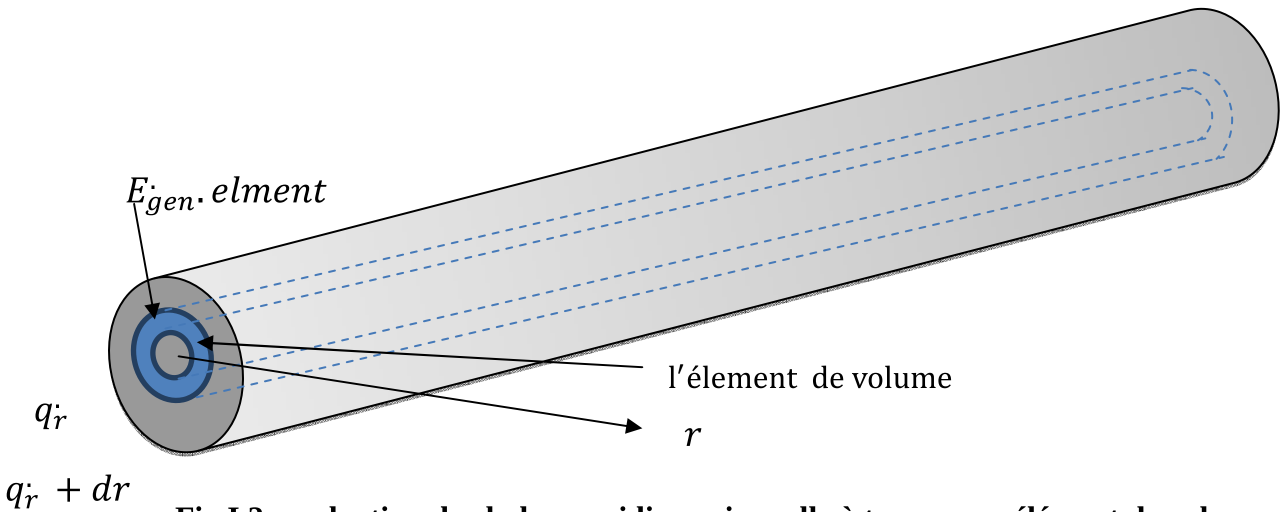


Fig I.2 conduction de chaleur unidimensionnelle à travers un élément de volume dans un cylindre long

On considère un élément de coque cylindrique mince d'épaisseur dr dans un long cylindre. La densité du cylindre est ρ, la chaleur spécifique est C et la longueur est L.

la surface de cylindre à la direction normale de transfert de chaleur à n'importe quel endroit est où r est la valeur du rayon à cet endroit est A= π2rL. Notez que la surface de transfert de chaleur A dépend de r dans ce cas, et donc elle varie selon l'emplacement. Un bilan énergétique sur cet élément de coque cylindrique mince d'épaisseur □r pendant un petit intervalle de temps Δt peut être exprimé comme:

En remplaçant l'équation (1,15) et (1,16) dans l'Eq (1,14)

$$\begin{pmatrix}\text{Taux de la conduction}\\ \text{de}\\ \text{chaleur}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Taux de la conduction}\\ \text{de}\\ \text{chaleur à } x+dx\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Taux de generation}\\ \text{de}\\ \text{chaleur à l'intérure}\\ \text{de}\\ \text{l'element}\\ \text{de voulume}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{Taux de changement}\\ \text{de}\\ \text{l'énerge contenue dans}\\ \text{l'élement de volume}\end{pmatrix}$$

$$\dot{Q_r} - \dot{Q_r} + dr + \dot{E_{gen}}.elment = \frac{\Delta E_{élément}}{\Delta t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.14)$$

$$\Delta \mathrm{E_{élément}} = \mathrm{E_{t+\Delta t}} - \mathrm{E_t} = \mathrm{mc(T_{t+\Delta t} - T_t)} = \rho.\mathrm{dr.A.C.}(\mathrm{T_{t+\Delta t}} - \mathrm{T_t}) \ldots\ldots\ldots\ldots.(\mathrm{I}.15)$$

$$\Delta E_{élément} = \dot{e_{gen\,élément}}.V_{élément} = \dot{e_{gen\,élément}}.A.dr \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.16)$$

$$\dot{\mathrm{Q_r}} - \dot{\mathrm{Q_r}} + \mathrm{dr} + \dot{\mathrm{E_{gen}}}.\mathrm{A.dr} = \rho.\mathrm{C.A.dr.}\left(\frac{\mathrm{T_{t+\Delta t}} - \mathrm{T_t}}{\mathrm{dt}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\mathrm{I}.17)$$

On divise l'Eq (1,17) par A.dr

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}r + dr - \dot{Q}r}{dr} + \dot{e_{gen}}. = \rho.C.\left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.18)$$

Dans la limite, dt→ 0 , dr→ 0 , l'équation **(1,18) devinant**

$$\frac{\dot{\mathrm{Q_r}} + \mathrm{dr} - \dot{\mathrm{Q_r}}}{dr} = \frac{\partial \dot{Q}}{dr}, \quad \left(\frac{\mathrm{T_{t+\Delta t}} - \mathrm{T_t}}{\mathrm{dt}}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Et en utilisant la loi de Fourier

$$\frac{1}{A}.\frac{\partial}{\partial r}\left(K.A\frac{\partial T}{\partial r}\right) += \dot{e_{gen}} = \rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.19) - (\mathrm{I}.15)$$

La loi de Fourier

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dot{Q}\mathrm{r} + \mathrm{dr} - \dot{Q}\mathrm{r}}{dr} = \frac{\dot{Q}\mathrm{r}}{dr} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-K.A\frac{\partial T}{\partial r}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.20)$$

L'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle dans un cylindre devient

***conductivité thermique variable**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(K.r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{e}_{gen}=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(I.21)$$

***Conductivité thermique constante**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{e}_{gen}}{K}=\frac{1}{\alpha}.\frac{\partial T}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(I.22)$$

$$\left(\alpha=\frac{\boldsymbol{k}}{\rho.C}\right)$$

***Régime parementant**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(K.r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{e}_{gen}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(I.23)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$$

***Régime transitoire pas de génération de chaleur ($\dot{e}_{gen}$ =0)**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}.\frac{\partial T}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(I.24)$$

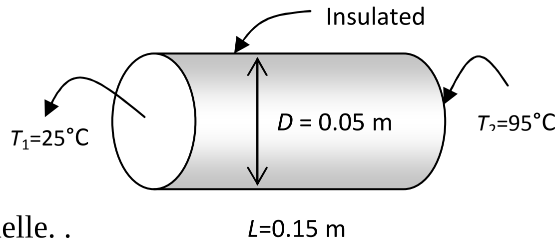
*** Régime parementant pas de génération de chaleur**

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(K.r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I.25)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}=,\dot{e}_{gen}=0\right)$$

Exemple (I.2)

Les surfaces supérieure et inférieure d'une tige cylindrique solide sont maintenues à des températures constantes de 20°C et 95°C tandis que la surface latérale est parfaitement isolée. Le taux de transfert de chaleur à travers la tige doit être déterminé pour les cas de tige de cuivre, d'acier et de granit.



Hypothèses

1- La conduction thermique est stable et unidimensionnelle. .

2 -La conductivité thermique est constante.

3- Il n'y a pas de génération de chaleur.

Les propriétés des conductivités thermiques sont données à k = 380 W / m ° C pour le cuivre, k = 18 W/ m° C pour l'acier et k = 1,2 W/ m° C pour le granit.

Notant que la surface de transfert de chaleur (la surface cylindre à la direction normale du transfert de chaleur) est constante, le taux de transfert de chaleur le long de la tige est déterminé à partir de :

$$\dot{Q} = kA\frac{T_1 - T_2}{L}$$

où L = 0,15 m et la surface de transfert de chaleur A est

$$A = \pi D^2 / 4 = \pi(0.05 \text{ m})^2 / 4 = 1.964 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Ensuite, le taux de transfert de chaleur pour chaque cas est déterminé comme suit:

(a) Le cuivre: $\dot{Q} = kA\frac{T_1 - T_2}{L} = (380 \text{ W/m·°C})(1.964 \times 10^{-3} \text{ m}^2)\frac{(95-20)\text{°C}}{0.15 \text{ m}} = \mathbf{373.1 \text{ W}}$

(b) l'acier: $\dot{Q} = kA\frac{T_1 - T_2}{L} = (18 \text{ W/m·°C})(1.964 \times 10^{-3} \text{ m}^2)\frac{(95-20)\text{°C}}{0.15 \text{ m}} = \mathbf{17.7 \text{ W}}$

(c) granit: $\dot{Q} = kA\frac{T_1 - T_2}{L} = (1.2 \text{ W/m·°C})(1.964 \times 10^{-3} \text{ m}^2)\frac{(95-20)\text{°C}}{0.15 \text{ m}} = \mathbf{1.2 \text{ W}}$

Discussion:

Le taux constant de conduction thermique peut différer de plusieurs ordres de grandeur, selon la conductivité thermique du matériau.

I.2.3 Equation de la conduction de chaleur dans une sphère

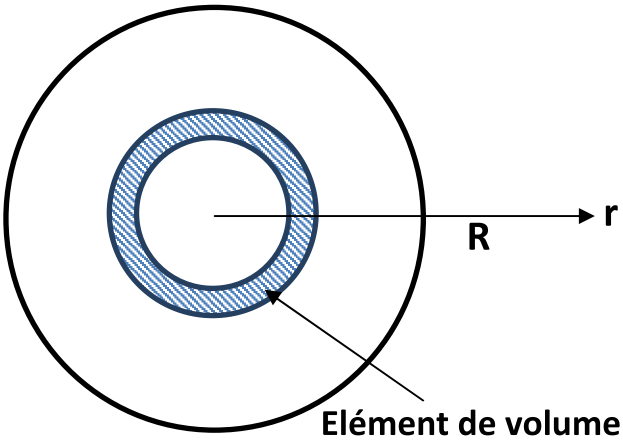


Fig I.3 conduction de chaleur unidimensionnelle à travers un élément de volume d'une sphère.

On considère un mince élément de coque sphérique d'épaisseur dr dans une sphère. La densité du cylindre est ρ, la chaleur spécifique est C et la longueur est L. la surface de sphère à la direction normale de transfert de chaleur à n'importe quel endroit est où r est la valeur du rayon à cet endroit est $A=4\pi R^2$ où r est la valeur du rayon à cet endroit .Notez que la surface de transfert de chaleur A dépend de r dans ce cas, et donc elle varie selon l'emplacement. Lorsqu'il n'y a pas de génération de chaleur .Un bilan énergétique sur cet élément de coque cylindrique mince d'épaisseur Δr pendant un petit intervalle de temps Δt peut être exprimé comme:

En utilisant A= 4πr^2 ou lien de A=2ΠrL.

L'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle pour une sphère

***conductivité thermique variable :**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.K\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{e}_{gen}=\rho.C.\frac{\partial T}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(I.26)$$

***conductivité thermique constante :**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{e}_{gen}}{k}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I.27)$$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{k}}{\rho.C}\right)$$

***Régime parementant**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.K\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{e}_{gen}}{k}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I.28)$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}=0\right)$$

***Régime transitoire pas de génération de chaleur ($\dot{e}_{gen}=0$)**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I.29)$$

***Régime parementant pas de génération de chaleur**

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}=,\dot{e}_{gen}=0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I.30)$$

Ou $\quad r^2\frac{\partial T}{\partial r}+2\frac{dT}{dr}=0$

I.4.Equation général de la conduction de chaleur

Dans cette paragraphe nous développons l'équation général gouvernant dans tel système en coordonnes rectangulaire cylindrique et sphérique :

***Coordonnés rectangulaire (cartésienne)**

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}}\right)+\dot{\mathrm{e}}_{\mathrm{gen}}=\rho.\mathrm{C}.\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(I.31)$$

***Conductivité thermique constante**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial^2 \mathrm{y}}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial^2 \mathrm{z}}+\frac{e_{\dot{g}en}}{K}= \frac{1}{\alpha}.\frac{\partial T}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (\mathrm{I}.32)$$

$\left(\alpha=\frac{k}{\rho.C}\right)$ **Équation de fourrier**

***Régime permanent**

$.\frac{\partial T}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}+\frac{e_{\dot{g}en}}{K}= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.33)$$

Equation de poisson

***Régime transitoire pas de génération de chaleur**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}+\frac{e_{\dot{g}en}}{K}= \frac{1}{\alpha}.\frac{\partial T}{\partial t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (\mathrm{I}.34)$$

Équation de diffusion

***Régime permanent pas génération de chaleur :**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.35)$$

Equation de la place

***Coordonnées cylindrique :**

$$\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{k}\,.\,\mathrm{r}\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\mathrm{k}\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \Phi}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{Z}}\left(\mathrm{k}\,.\,\mathrm{r}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{Z}}\right)+\mathrm{e}_{\dot{\mathrm{g}}\mathrm{en}} = \rho.\mathrm{C}.\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.36)$$

***Coordonnées sphériques**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k\,.\,r^2\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2.\sin^2\theta}.\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial \Phi}\right)+\frac{1}{r^2.\sin^2\theta}.\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)+e_{\dot{g}en} = \rho.C.\frac{\partial T}{\partial t} \ldots (\mathrm{I}.37)$$

Exemple (I.3)

Un récipient sphérique est soumis à une température spécifiée sur la surface intérieure et à une convection sur la surface extérieure. La formulation mathématique, la variation de la température et le taux de transfert de chaleur doivent être déterminés pour un transfert de chaleur unidimensionnel régulier.

Hypothèses

1- La conduction thermique est stable et unidimensionnelle car il n'y a pas de changement avec le temps et il y a une symétrie thermique autour du point médian.

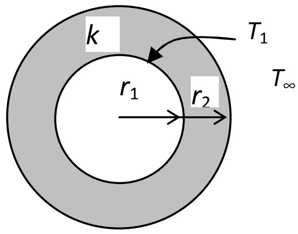
2- La conductivité thermique est constante.

3- Il n'y a pas de génération de chaleur

Propriétés La conductivité thermique est donnée comme étant k = 30 W/m. °C.

Notant que le transfert de chaleur est unidimensionnel dans la direction radiale r, la formulation mathématique de ce problème peut être exprimée comme suit:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$



et

$$T(r_1) = T_1 = 0°\text{C}$$

$$-k\frac{dT(r_2)}{dr} = h[T(r_2) - T_\infty]$$

(b) L'intégration de l'équation différentielle une fois par rapport à r donne

$$r^2\frac{dT}{dr} = C_1$$

Diviser les deux côtés de l'équation ci-dessus par r pour l'amener à une forme facilement intégrable puis intégrer,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Où et C2 sont des constantes arbitraires. L'application des conditions aux limites donne

$r = r_1$: $\quad T(r_1) = -\dfrac{C_1}{r_1} + C_2 = T_1$

$r = r_2$: $\quad -k\dfrac{C_1}{r_2^2} = h\left(-\dfrac{C_1}{r_2} + C_2 - T_\infty\right)$

Résoudre pour donne simultanément

$$C_1 = \frac{r_2(T_1 - T_\infty)}{1 - \dfrac{r_2}{r_1} - \dfrac{k}{hr_2}} \quad \text{and} \quad C_2 = T_1 + \frac{C_1}{r_1} = T_1 + \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \dfrac{r_2}{r_1} - \dfrac{k}{hr_2}}\frac{r_2}{r_1}$$

En se substituant à la solution générale, la variation de température est déterminée comme étant

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + T_1 + \frac{C_1}{r_1} = C_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) + T_1 = \frac{T_1 - T_\infty}{1 - \dfrac{r_2}{r_1} - \dfrac{k}{hr_2}}\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2}{r}\right) + T_1$$

$$= \frac{(0-25)°\text{C}}{1 - \dfrac{2.1}{2} - \dfrac{30\ \text{W/m}\cdot°\text{C}}{(18\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C})(2.1\ \text{m})}}\left(\frac{2.1}{2} - \frac{2.1}{r}\right) + 0°\text{C} = 29.63(1.05 - 2.1/r)$$

(c) Le taux de conduction thermique à travers le mur est

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx} = -k(4\pi r^2)\frac{C_1}{r^2} = -4\pi k C_1 = -4\pi k \frac{r_2(T_1 - T_\infty)}{1 - \frac{r_2}{r_1} - \frac{k}{hr_2}}$$

$$= -4\pi(30\ \text{W/m}\cdot°\text{C})\frac{(2.1\,\text{m})(0-25)°\text{C}}{1 - \frac{2.1}{2} - \frac{30\ \text{W/m}\cdot°\text{C}}{(18\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C})(2.1\,\text{m})}} = \mathbf{23{,}460\ W}$$

I.3 Conditions aux limites

Une des caractéristiques des équations de type elliptique c'est qu'ils nécessitent des conditions aux limites aux frontières du domaine d'étude. Nous présentons en ce qui suit les conditions aux limites spécifiques à l'équation de l'énergie. Il existe 03 types de conditions aux limites.

I.3.1 Conditions de Direchlet 'Température imposée'

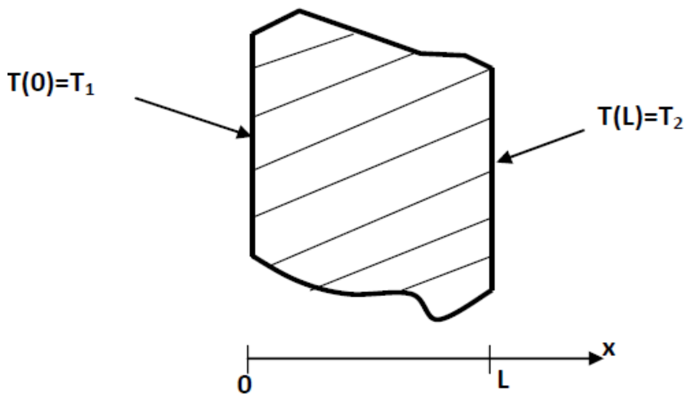


Figure I.4 Conditions aux limites du 1er type.

La valeur de la grandeur à déterminée est connue aux différentes limites (frontières) de la géométrie du domaine d'étude. Cette condition aux limite est facile à programmé, par contre il est difficile de maintenir tout une surface à une température fixe au laboratoire.

I.3.2 Flux imposé 'condition de Neuman'

Aux frontières la densité du flux est connue (voir figure 2.2) lorsque la paroi est isolée le flux thermique dans ce cas est nul. Cette condition est très facile à mettre en œuvre au laboratoire.

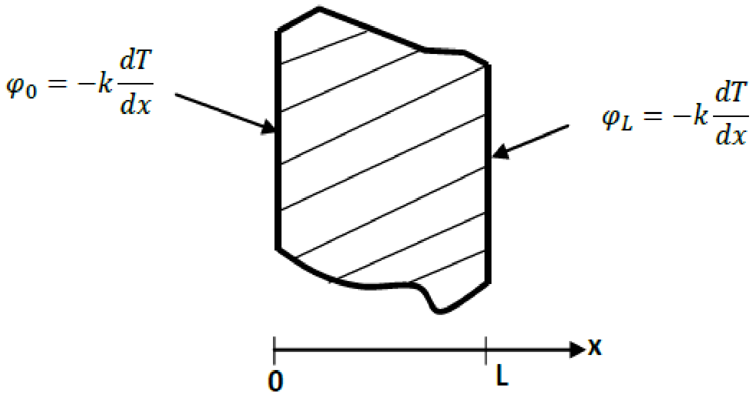


Figure I.5 Conditions aux limites du 2er type.

I.3.3 Condition aux limites du 3eme type.' Condition de Cauchy

Lorsque les frontières du domaine d'étude sont en contact avec un fluide en mouvement dont on connait le coefficient convectif et la température, la condition aux limites imposée dans ce cas est la continuité des flux convectif et diffusif à l'interface (frontière solide/fluide).

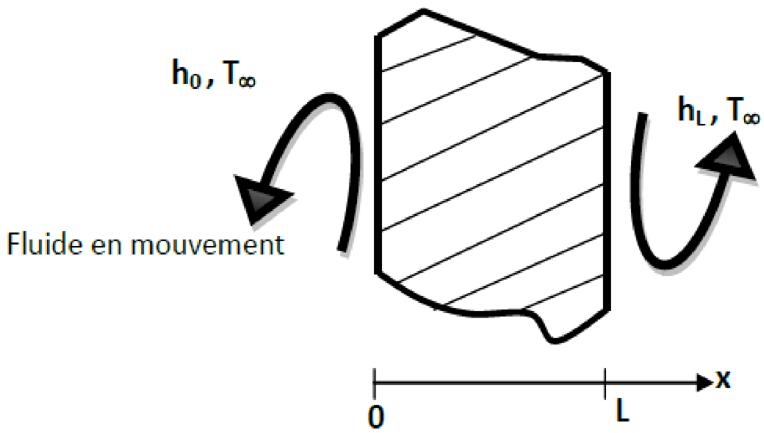


Figure I.6 Conditions aux limites du 3er type.

La condition à l'interface limite s'écrit comme suit :

A x = 0 flux convectif = flux diffusif

L'expression de la densité du flux convectif est donnée par la loi de refroidissement de Newton :

$$\Phi_0 = h_0(T_0 - T_\infty) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (I.38)$$

L'expression du flux diffusif est donnée par la loi de Fourrier :( )

$$\Phi_0 = -k\frac{\partial T}{\partial x} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (I.39)$$

A l'interface

$$\Phi_0 = -k\frac{\partial T}{\partial x} = h_0(T_0 - T_\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.40)$$

Noter qu'à partir de la relation $(\mathrm{I}.40)$on détermine le nombre de Nusselt comme suit :

$$N_u = \frac{h_0 L_C}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\mathrm{I}.41)$$

Avec :

LC : longueur caractéristique.

Donc en réécrivant l'équation$(\mathrm{I}.40)$, on aura :

$$\frac{h_0}{K} = \frac{-\frac{dT}{dx}}{(T_0 - T_\infty)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.42)$$

Multipliant les deux membres de l'équation $(\mathrm{I}.42)$ par la longueur caractéristique LC

$$N_u = \frac{h_0 L_C}{k} = \frac{-\frac{dT}{dx} L_C}{(T_0 - T_\infty)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}.43)$$