الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdelhafid boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et Techniques

Spécialité : Génie mécanique 3em année licence **Année universitaire** 2020/2021

Option: énergétique

L'auteur : Dr Ali Bendjaghlouli

Cours: Mécanique des fluides II

Chapitre I: Cinématique des fluides

I-1- Rappel mathématique

I-1-1- Loi de composition interne : Somme vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{W}$ tel que :

$\forall \quad \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in R^3 \quad$ nous avons $\quad \vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \in R^3$

Soit (a_1, a_2, a_3) les composantes du vecteur $\vec{V}_1$ d'où : $\vec{V}_1 = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$ et

(b_1, b_2, b_3) les composantes du vecteur $\vec{V}_2$ d'où : $\vec{V}_2 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$

Le vecteur somme est défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$$

I-1-2-Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre réel et $\dot{V}$ un vecteur, leur produit est un vecteur.

$\forall \lambda \in R \quad , \quad \forall \; \vec{V} \in R^3 \quad ========> \quad \vec{W} = \lambda \vec{V} \in R^3$

Le vecteur $\vec{W}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$.

Si le vecteur $\vec{V}$ a pour composantes *(a, b, c)* tel que : $\vec{V} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$; le vecteur $\vec{W}$ s'écrirait : $\vec{W} = \lambda a_1\,\vec{e}_1 + \lambda a_2\,\vec{e}_2 + \lambda a_3\,\vec{e}_3$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

a) Distribution par rapport à l'addition des scalaires : $\quad (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{V} = \lambda_1 \vec{V} + \lambda_2 \vec{V}$;

b) Distribution par rapport à la somme vectorielle : $\lambda(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=\lambda\vec{V}_1+\lambda\vec{V}_2$;

c) Associativité pour la multiplication par un scalaire : $\lambda_1(\lambda_2\vec{V})=\lambda_1\lambda_2\vec{V}$

I-1-3-Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs V_1 et V_2 une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs, un scalaire (nombre réel) noté : $\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2$ tel que :

$$\forall\ \vec{V}_1,\ \vec{V}_2\in R^3 \quad \Rightarrow \vec{V}_1\bullet\vec{V}_2\in R$$

$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=\left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\|\cos(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$; le résultat d'un produit scalaire est un scalaire.

Le produit scalaire est nul, si :

- Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- L'un des vecteurs est nul.

I-1-3-1-Expression analytique du produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Leurs expressions dans cette base sont :

$$\vec{V}_1=a_1\,\vec{e}_1+a_2\,\vec{e}_2+a_3\,\vec{e}_3$$

$$\vec{V}_2=b_1\,\vec{e}_1+b_2\,\vec{e}_2+b_3\,\vec{e}_3$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est donné par :

$$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=\left(a_1\,\vec{e}_1+a_2\,\vec{e}_2+a_3\,\vec{e}_3\right)\bullet\left(b_1\,\vec{e}_1+b_2\,\vec{e}_2+b_3\,\vec{e}_3\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

I-1-4-Base orthonormée

Une base est dite orthonormée si les vecteurs qui la constituent sont perpendiculaires deux à deux et si leurs normes sont égales à 1. Si $b=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons alors :

$$\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2=0 \quad , \quad \vec{e}_1\bullet\vec{e}_3=0 \quad , \quad \vec{e}_2\bullet\vec{e}_3=0$$

$$\vec{e}_1\bullet\vec{e}_1=\vec{e}_1^{\,2}=1 \quad , \quad \vec{e}_2\bullet\vec{e}_2=\vec{e}_2^{\,2}=1 \quad , \quad \vec{e}_3\bullet\vec{e}_3=\vec{e}_3^{\,2}=1$$

I-1-5- Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ de l'espace R^3 est un vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, défini par : $\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \left\|\vec{V_1}\right\| \left\|\vec{V_2}\right\| \sin\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) \vec{n}$

- $$(\vec{V_1} + \vec{V_2}) \wedge \vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{W} + \vec{V_2} \wedge \vec{W}$$
  $$\vec{W} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{W} \wedge \vec{V_1} + \vec{W} \wedge \vec{V_2}$$
- $$(\lambda \vec{V}) \wedge \vec{W} = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$
  $$\vec{V} \wedge \lambda \vec{W}) = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$
- $$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$$
- $$\vec{V} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{V}) = \vec{0}$$

Si $b = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est orthonormée nous avons :

Sens direct : $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}$, $\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}$

Sens opposé : $\vec{e_2} \wedge \vec{e_1} = -\vec{e_3}$, $\vec{e_3} \wedge \vec{e_2} = -\vec{e_1}$, $\vec{e_1} \wedge \vec{e_3} = -\vec{e_2}$

I-1-5-1-Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormé direct

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ de composantes respectives dans une base orthonormée direct R: $\vec{V_1} = \underset{R}{\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases}}$ et $\vec{V_2} = \underset{R}{\begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}}$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases} = \begin{cases} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{cases}$$

I-1-6-Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par : $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$

$$\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \vec{V}_3 \bullet \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \vec{V}_2 \bullet \left(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1\right)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \bullet \vec{C}) \quad - \quad \vec{C}\,(\vec{A} \bullet \vec{B})$$

I-1-7-Opérateur gradient dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On défini l'opérateur vectorielle noté : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ comme étant la dérivée dans l'espace suivant les trois directions des vecteurs unitaires.

Le gradient d'un scalaire U est défini comme étant la dérivée vectorielle suivant les trois directions respectives $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par rapport aux variables : x, y, z .

$$\overrightarrow{gradU}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{grad}\,U = \vec{\nabla} U$$

I-1-8-Opérateur divergence dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

La divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$ est définie comme étant le produit scalaire de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$; noté : $div\vec{V} = \vec{\nabla} \bullet \vec{V}$

$$div(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \bullet \left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

I-1-9-**Opérateur rotationnel dans un repère orthonormé** $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$ est définie comme étant le produit vectoriel de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$;

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \quad ; \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right)$$

Sous la forme matricielle nous aurons : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \wedge \begin{cases} V_x \\ V_y \\ V_z \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{cases}$

Remarque :

Si f est un champ scalaire et $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques, les relations suivantes sont vérifiées :

- $div(f\vec{A}) = f div\vec{A} + \vec{A}\,\overrightarrow{gradf}$;
- $rot(rot\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, avec $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$;
- $\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{gradf} \wedge \vec{A}) + f\,\overrightarrow{rot}(\vec{A})$;
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{gradf}) = \vec{0}$;
- $div(\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0$;
- $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{B})$
- $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi + \psi) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi + \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi$
- $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi\psi) = \varphi\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi + \psi\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$
- $\text{div}(\vec{U} + \vec{V}) = \text{div}\vec{U} + \text{div}\vec{V}$

I-2-Cinématique des fluides

I-2-1-Définition: La cinématique des fluides c'est la description du mouvement du fluide sans se préoccuper des causes du mouvement.

I-2-2 -Description de Lagrange

Il s'agit d'une description de l'écoulement qui consiste à suivre dans l'espace fluide la position d'une particule choisie en fonction du temps. Il en découle la définition de la « **trajectoire** » d'une particule fluide : c'est l'ensemble des positions occupées successivement par une même particule (**figure I-1**).

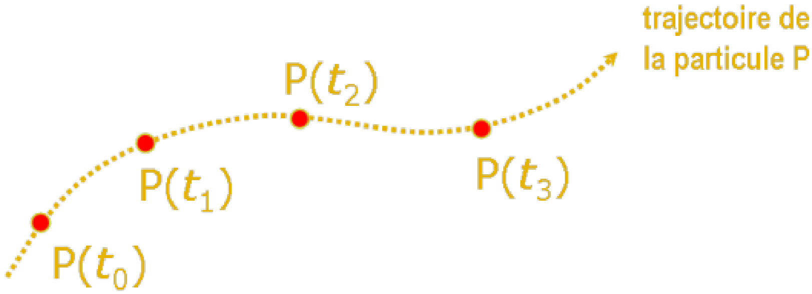

figure I-1

I-2-3-Description d'Euler

C'est une description de l'écoulement qui consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chacun des points de l'espace fluide. Ainsi, à chaque point M est associé une vitesse $\vec{v}_M(t)$ susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement du fluide est alors décrit au moyen d'un ensemble de vecteurs vitesse appelé « **champ de vecteurs vitesse** ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée.

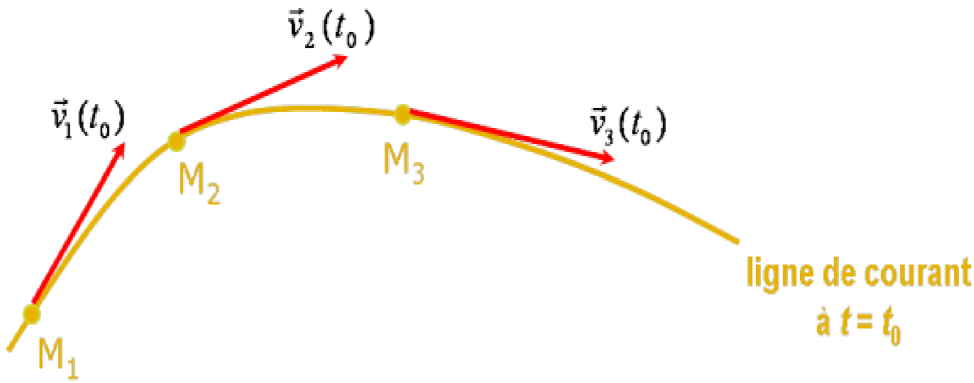

figure I-2

I-2-4- variables d'euler Les variables d'Euler sont le temps t et les coordonnées Xi de la particule fluide à l' instant t, les fonctions à déterminer sont les vitesses Ui :

$$\begin{cases} u = g_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ v = g_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ w = g_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{cases}$$

I-2-5- champ d'accélération

La différentielle de la vitesse d'une particule de fluide (toujours la même) vaut :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz$$

Pour la composante de vitesse $\boldsymbol{v}$, on peut écrire :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Soit vectoriellement

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{accélération\ totale} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{accélération\ locale} + \underbrace{\vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}\ \vec{V}}_{accélération\ convective}$$

I-2-6- Ligne de courant (ligne d'écoulement)

Une ligne de courant est la courbe qui est tangente en chacun de ces points au vecteur de vitesse en ces points.

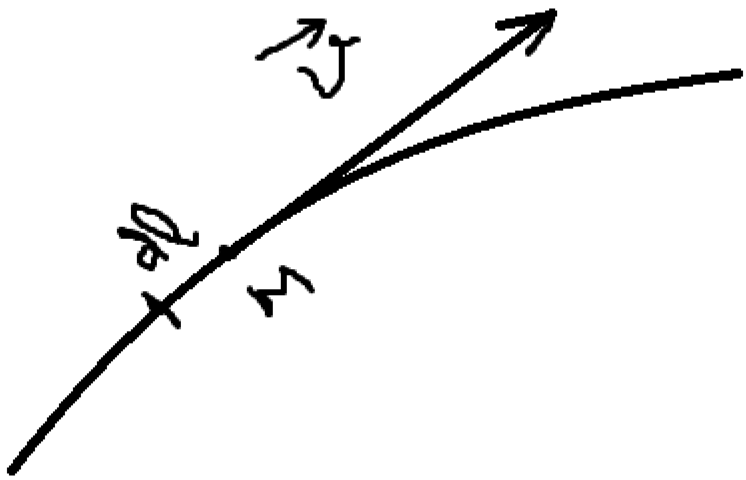

figure I-3

Plaçons à un instant donné t, une courbe qui en chaque un de ces points, est tangente au vecteur vitesse correspondant est dite ligne de courant. Si dx, dy et dz désigne les composantes d'un élément dl pris sur une telle ligne on dit avoir :

$$\vec{dl} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} U_1(x,y,z,t) \\ U_2(x,y,z,t) \\ U_3(x,y,z,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nous aurons Une Ligne de courant est définie par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Exemple
On envisage l'écoulement bidimensionnel suivant tel que le vecteur vitesse d'une particule fluide soit :

$$\vec{V} = (A + \alpha t)\vec{x}_1 + B\vec{x}_2$$

Déterminer les lignes de courant à un instant et la trajectoire.

Réponse :

Les lignes de courant sont données par l'équation :

Les lignes de courant sont données par l'équation :

$$\frac{dx}{U_1(x,y,z,t)} = \frac{dx_2}{U_2(x,y,z,t)}$$

qui à l'instant t_0 donne ici :

$$\frac{dx_1}{(A + \alpha t_0)} = \frac{dx_2}{B}$$

Une intégration directe donne l'équation suivante:

$$\frac{x_1}{(A + \alpha t_0)} = \frac{x_2}{B} + C$$

Il s'agit de l'équation d'une famille de droites. Les lignes de courant sont donc, à l'instant t_o, des droites.

Trajectoire :

$$\begin{cases} dx_1 = U_1 dt = (A + \alpha t)dt \\ dx_2 = U_2 dt = Bdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = At + {}^{\alpha}/_{2}\, t^2 + x_{10} \\ x_2 = Bt + x_{20} \end{cases}$$

En éliminant le temps entre x_1 et x_2, on trouve :

$$x_1 = A\frac{x_2 - x_{20}}{B} + \frac{\alpha}{2B^2}(x_2 - x_{20})^2 + x_{10}$$

Les trajectoires sont ainsi des paraboles.

I-2-7- Ligne d'émission

Toutes les particules étant passées par un même point E sont situées à l'instant t sur une courbe appelée « ligne d'émission »

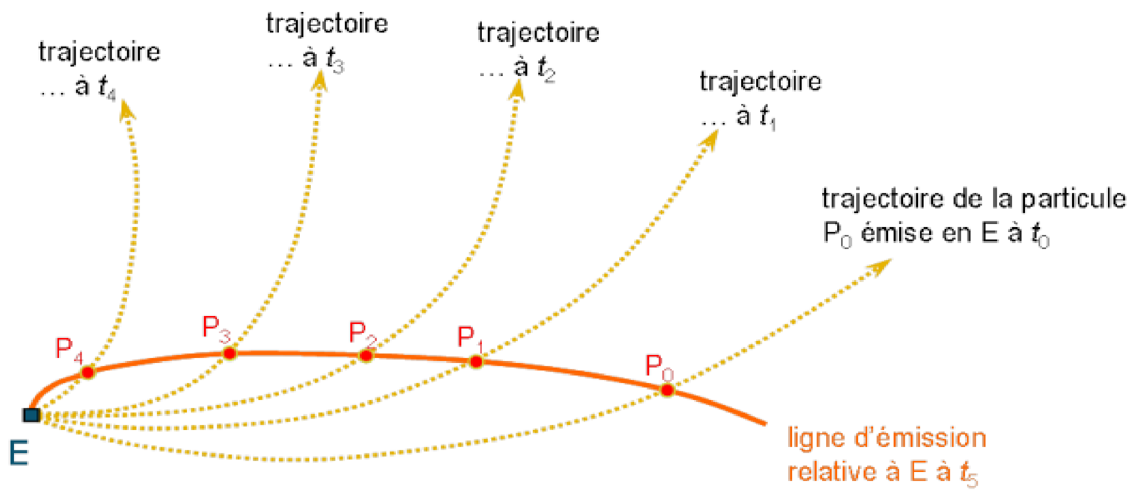

figure I-4

I-2-8-L'équation de continuité

Mathématiquement, elle est représentée, comme étant le taux de variation de masse d'un système est nul. Par définition, un système = quantité de masse fixe.

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{Système} = 0$$

Considérons un élément fluide parallélépipédique de volume dV=dxdydz (voir Fig.I-5) incompressible au repos.

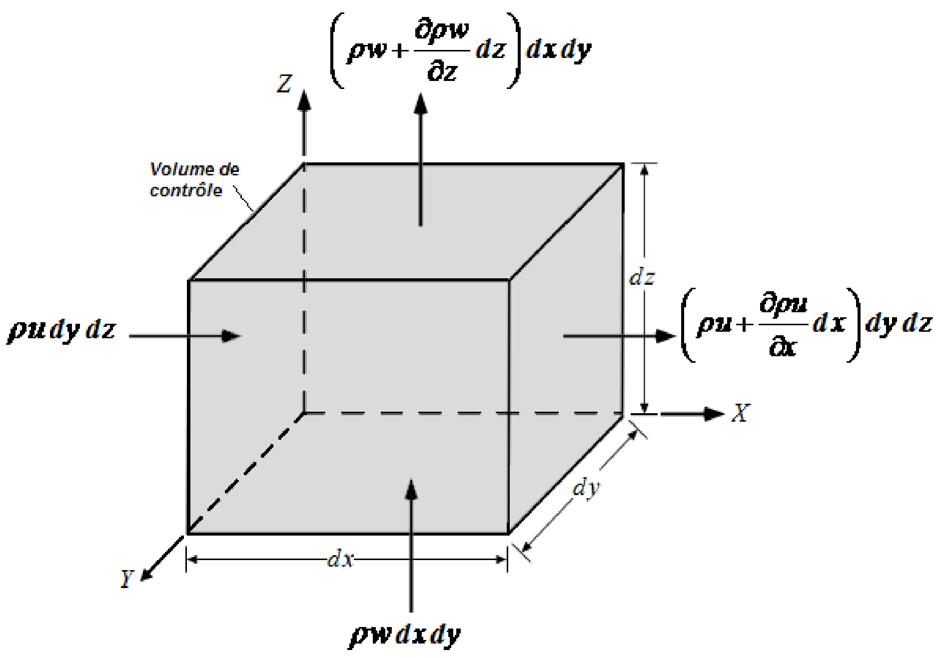

figure I-5 Volume de contrôle d’un élément fluide parallélépipédique

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{Sortantes} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{Entrantes} = 0$$

Avec, $\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$

Essayons de développer les termes de l'équation ci-dessus suivant les trois axes ox, oy et oz.

Pendant le temps dt, il entre par la face dydz un débit massique de fluide égale à :

ρudydz.

Pendant le même temps, il sort part la face opposée dydz, un flux massique de fluide égale à celui qui est entré, augmenté de sa différentielle partielle par rapport à x. or seules les grandeurs u et ρ peuvent varier suivant x. le débit massique sortant est donc :

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx\right] dydz$$

La différence de ces deux termes donne :

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dxdydz$$

Qui représente la variation (augmentation) du débit massique traversant le parallélépipède.

Par un raisonnement similaire, on peut déterminer la variation en débit à travers les autres faces. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau I.1.

Face	***Débit massique entrant***	***Débit massique sortant***	***Augmentation***
x	$\rho udydz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx\right] dydz$	$+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dxdydz$
y	$\rho vdxdz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dy\right] dxdz$	$+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dydxdz$
z	$\rho wdxdy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dz\right] dxdy$	$+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dzdxdy$

Tableau I.1.

Après substitution de ces termes dans l'équation $\left.\frac{dm}{dt}\right|_{Système} = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz + \frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho u)dxdydz + \frac{\partial \rho}{\partial y}(\rho v)dxdydz + \frac{\partial \rho}{\partial z}(\rho w)dxdydz = 0$$

Où,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Où,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Pour un fluide incompressible, $\rho = Cte$, *c.-à-d.* : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \vec{V} = div\vec{V} = 0$$

C'est la forme recherchée de l'équation de conservation de masse pour un volume de contrôle infinitésimal dans un système de coordonnées cartésiennes.

I-2-8-1- L'équation de continuité appliqué au tube de courant

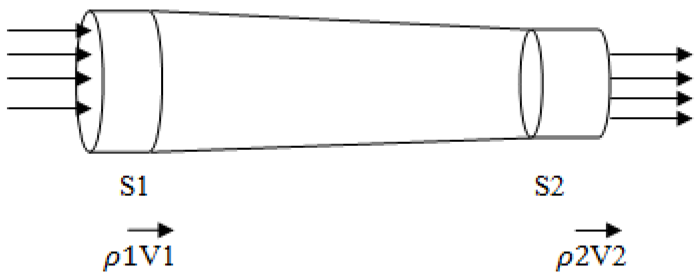

figure I-6

$$q = \frac{dm}{dt}$$

$dm1 = \rho 1 dv1 = \rho 1(v1s1)dt$

$dm2 = \rho 2 dv2 = \rho 2(v2s2)dt$

$dm1 = dm2$ si le fluide incompressible $\rho 1 = \rho 2$ donc $v1s1 = v2s2$

I-2-9- Fonction de courant

I-2-9-1-définition: Considérons l'écoulement conservatif d'un fluide incompressible. Dans ce cas, l'équation de continuité se formule simplement par : $\vec{\nabla}\vec{v}=0$. Par ailleurs, quelle que soit la quantité vectorielle $\vec{A}$, en tout point de l'espace la relation mathématique $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})=0$ doit être vérifiée. Donc, par identification, on peut définir en tout point de l'espace le vecteur vitesse comme résultant de $\vec{v}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$, où $\vec{A}$ peut alors être qualifié de « potentiel vecteur ». La connaissance de ce potentiel vecteur en tout point de l'espace permet donc d'en déduire les trois composantes du vecteur vitesse en ce même point :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} u = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ v = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ w = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant que l'écoulement est bidimensionnel, dans le plan (x,y), impliquant que w=0 et qu'il y ait invariance par translation suivant z, d'où $\partial/\partial z=0$. Il reste alors :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ w = 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc en conclure que le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement plan dérive d'une quantité scalaire, la fonction de courant $\Psi(x, y) = A_z$. La connaissance de cette seule fonction de courant permet alors d'en déduire le champ de vecteurs vitesse en tout point de l'écoulement, par simple application de :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{v} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{x}} \end{cases}$$

Dans un système de coordonnées cylindriques, la démarche reste la même et conduit à définir $\Psi(r,\theta)$ pour exprimer les composantes cylindriques du vecteur vitesse comme :

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$
$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

I-2-9-2- Propriétés de la fonction de courant

Partant de la fonction de courant pour définir le vecteur vitesse, l'équation de continuité appliquée dans le cadre d'un écoulement plan et conservatif d'un fluide incompressible permet d'établir une propriété remarquable de la fonction de courant :

$$\vec{\nabla}\vec{v}=0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)=0$$

d'où : $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}$

Considérons un écoulement plan (x, y) bidimensionnel, l'équation des lignes de courant peut devenir : $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v} = \dfrac{dz}{w}$

$\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$ $\quad$ **$d\psi = 0$ donc** $\quad$ **$\psi(x, y) = cst$**

Autrement dit, la tangente à la courbe est en tout point identique à l'orientation du vecteur vitesse (voir figure I-7). Une courbe qui présente cette propriété est alors une courbe que l'on a déjà définie comme étant une ligne de courant. Il en résulte que la fonction de courant est constante le long d'une ligne de courant.

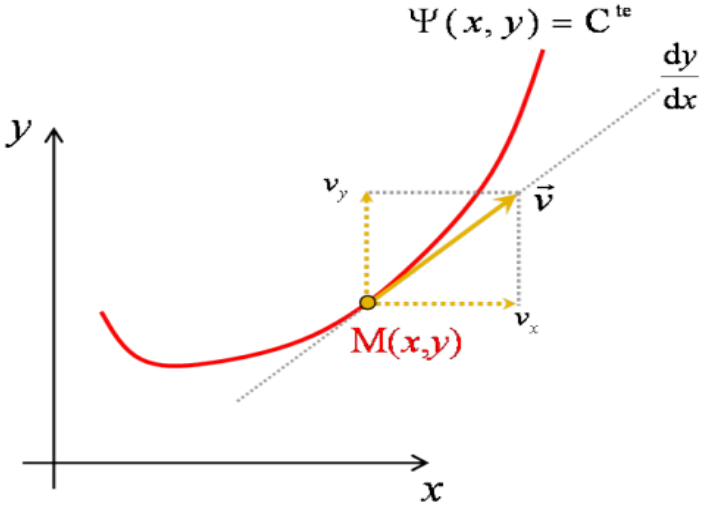

figure I-7

I-2-9-3- débit et lignes de courant

Considérons, au sein d'un écoulement plan, deux lignes de courant infiniment voisines **(voir** figure I-7**)** et caractérisées par des fonctions de courant dont les constantes sont infiniment proches : Ψ et $\Psi + d\Psi$. Considérons par ailleurs deux points M et M' appartenant à chacune de ces deux lignes de courant et donnons nous pour objectif de calculer le débit volumique de l'écoulement à travers le segment [MM']. Il s'agit d'un débit élémentaire qui peut se décomposer en considérant la somme des débits traversant les projections selon x et y du segment MM'. On a ainsi :

$dq_v = v_x dy - v_y dx$ où le signe - rend compte du fait que le débit à travers dx contribue négativement au débit global. Or, les composantes de la vitesse peuvent se formuler en fonction des dérivées partielles de la fonction de courant : $v_x = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $v_y = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$; on obtient alors cette nouvelle formulation du débit élémentaire :

$dq_v = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} dx$ On vient ainsi de montrer que $dq_v = d\Psi$.

Évidemment, l'intérêt de cette équivalence est qu'il est possible de calculer simplement le débit volumique de fluide s'écoulant entre deux lignes de courant quelconques en intégrant $d\Psi$ entre deux points quelconques A et B appartenant à chacune de ces deux lignes **(voir** figure I-8**) :**

$$q_V = \int_A^B dq_V = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$

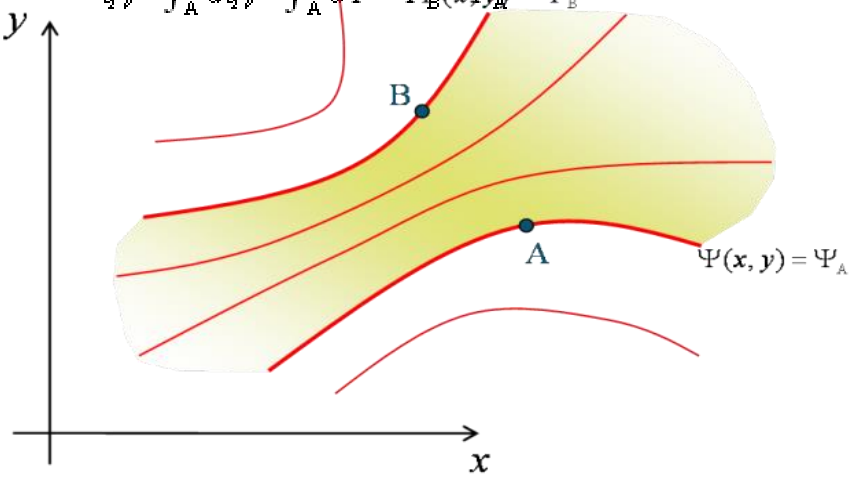

figure I-8

I-2-10- Ecoulements rotationnels et potentiel des vitesses

I-2-10-1-Définitions: Un écoulement est qualifié d'irrotationnel lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotation pure.

I-2-10-2-Mouvement et déformation d'une particule fluide : Au sein de l'écoulement, chaque particule fluide subit des changements de *position*, *d'orientation* et de *forme*.

I-2-10-2-1-Termes d'élongation

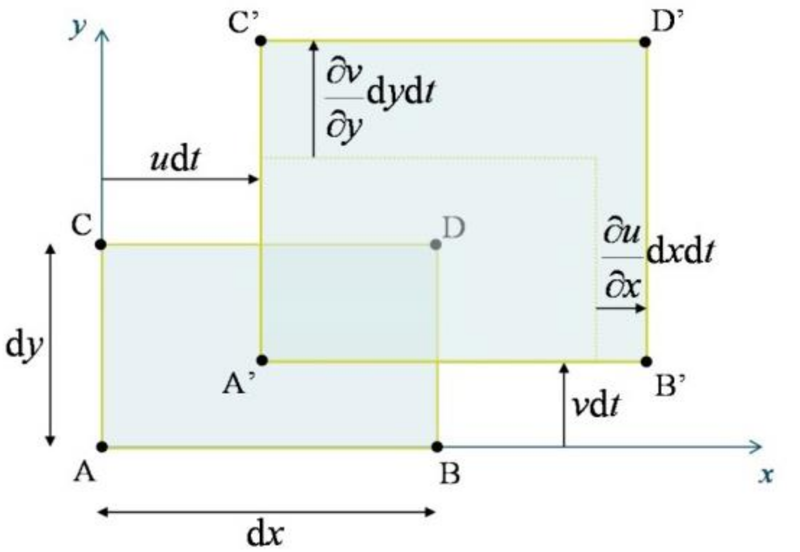

Figure I-9

La particule fluide subit une translation et une élongation.

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dt\right)\left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy\, dt\right) - dx\, dy}{dx\, dy} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dt + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} dt^2$$

$$= \quad \frac{\Delta S}{S} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dt$$

la variation relative de volume (ou taux d'expansion du volume) de la particule fluide comme :

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt$$

I-2-10-2-2-Termes de déformation angulaire et rotation

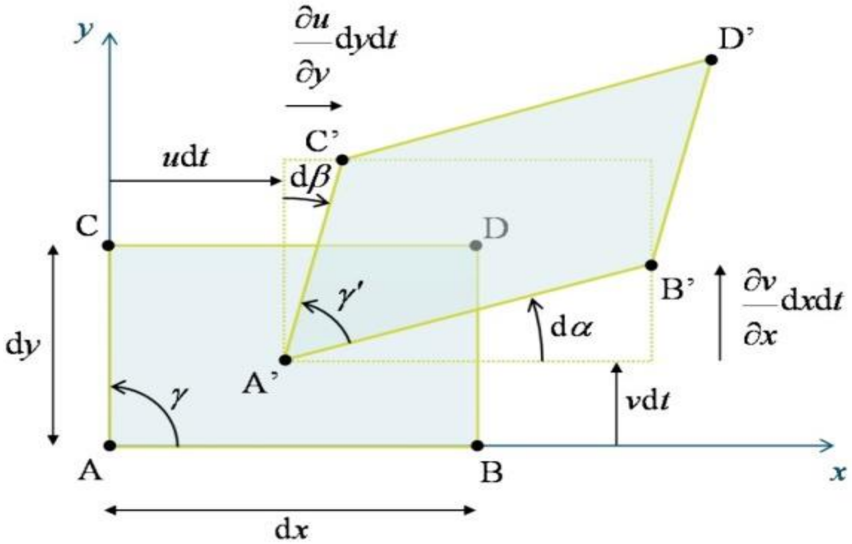

Figure I-10

$$d\alpha \approx \tan d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx\, dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt \quad , \quad d\beta \approx \tan d\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy\, dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$\omega_{A'x} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\omega_{A'y} = -\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\omega_{A'x} + \omega_{A'y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Donc le vecteur de la vitesse angulaire est:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{1}{2}\nabla\wedge\vec{v}$$

Le vecteur de tourbillon est $\vec{\Omega} = \overrightarrow{2\omega}$

I-2-11- potentiel des vitesses

Puisque le vecteur tourbillon n'est autre que le rotationnel du vecteur vitesse :

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}}$$

il en résulte qu'un écoulement irrotationnel doit vérifier :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Or, quelle que soit la fonction scalaire Φ, la relation mathématique $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\Phi) = \vec{0}$ est toujours vraie. Donc, par identification de $\vec{V}$ avec $\vec{\nabla}\Phi$, on peut définir le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement à partir de la seule fonction scalaire Φ, que l'on nommera désormais **potentiel des vitesses**. Il en résulte que les composantes du vecteur vitesse s'expriment en fonction des dérivées partielles du potentiel des vitesses :

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ,\quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\ ,\quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Sur la base des mêmes hypothèses que celles posées pour définir la fonction de courant, supposons que l'écoulement soit conservatif en plus d'être irrotationnel : dans ces conditions, on doit vérifier l'équation de continuité sous sa forme : $\vec{\nabla}\Phi = \vec{0}$; ce qui conduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \ \Rightarrow\ \Delta\Phi = 0$$

I-2-11-1- Remarque

Si l'écoulement est irrotationnel, la fonction de courant doit également vérifier l'équation de *Laplace*. En effet, on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \vec{0} \ \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{y}} \\ -\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{x}} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \ \Rightarrow\ -\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{x}^2} - \frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{y}^2} = \mathbf{0}\ \Leftrightarrow \Delta\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}$$

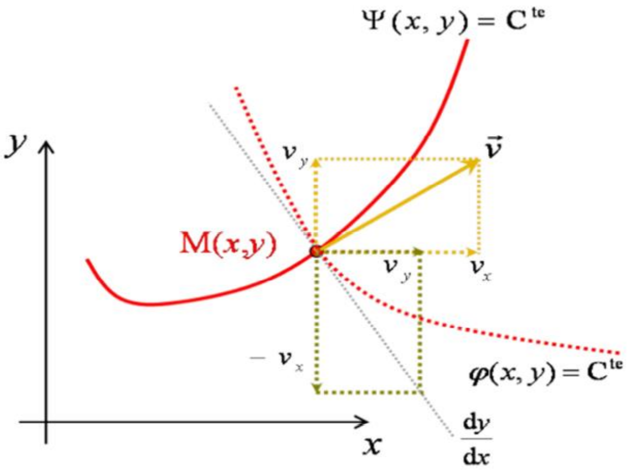

Figure I-11

Au sein d'un écoulement plan, l'équation $\Phi(x,y) = cte$ définit une courbe qu'on nommera « **équipotentielle** ». Le potentiel des vitesses étant constant le long d'une telle courbe, on doit vérifier :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy$$

Or,

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad et \; v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

d'où : $udx + vdy = 0$ devant être vérifiée en tout point de l'équipotentielle. Autrement formulé, on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

ce qui signifie qu'en chacun de ses points, la courbe est orthogonale au vecteur vitesse

(Il en résulte par ailleurs que les équipotentielles sont partout orthogonales aux lignes de courant**.** La figure I-11 illustre cette propriété à partir d'un exemple d'écoulement plan où les lignes de courant sont représentées en traits pleins et les équipotentielles en traits pointillés.

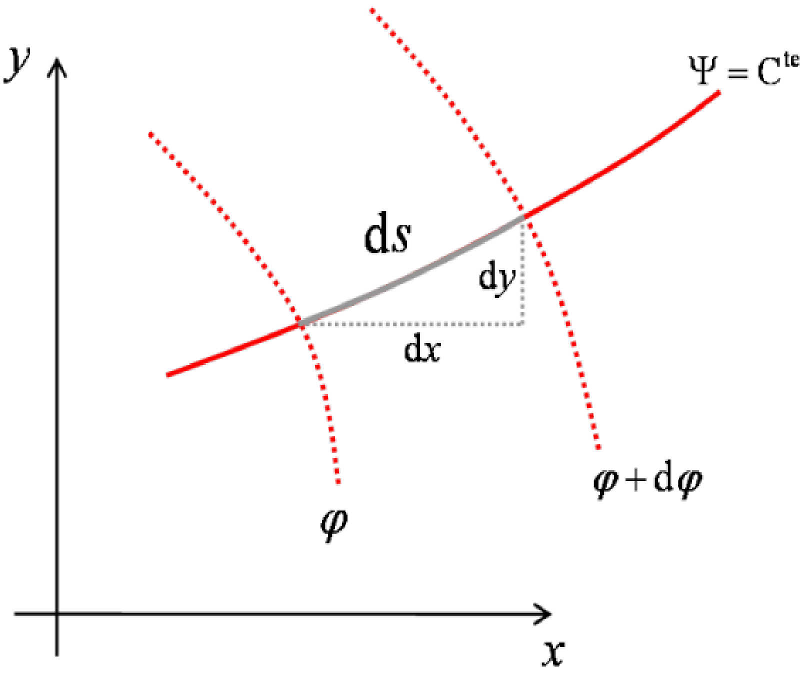

Figure I-12

La signification physique de ces équipotentielles se comprend à travers le calcul de la longueur d'un élément d'arc le long d'une ligne de courant entre deux équipotentielles (voir figure I-12). Si les deux équipotentielles sont infiniment

proches, on peut considérer que leurs deux constantes respectives diffèrent d'une quantité élémentaire $d\Phi$ (l'une est de constante Φ, l'autre de constante $\Phi + d\Phi$). Si on note ds la longueur de l'élément d'arc, il peut se décomposer en :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Par ailleurs, on a déjà établi que :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = udx + vdy$$

avec localement le long de la ligne de courant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

d'où :

$$dy = \frac{v}{u} dx$$

et donc :

$$d\Phi = \mathrm{udx} + \frac{v^2}{u}dx = \frac{u^2+v^2}{u}dx = \frac{V^2}{u}dx$$

On obtient de même

$$d\Phi = \frac{V^2}{u}dx$$

et on en déduit que :

$$dx = \frac{u}{V^2}d\Phi \;\text{ et }\; \mathrm{dy} = \frac{v}{V^2}d\Phi$$

Ainsi, la longueur de l'élément d'arc se reformule :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{u}{V^2}d\Phi\right)^2 + \left(\frac{v}{V^2}d\Phi\right)^2} = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{V^4}d\Phi^2} \;\; soit \quad ds = \frac{d\Phi}{V}$$

I-2-11-2- Condition de cauchy-Riemann

Pour un écoulement en x, y le potentiel des vitesses est tel que :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \end{cases}$$

La fonction de courant $\boldsymbol{\Psi}$ est telle que :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} \\ u = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} \end{cases}$$

On tire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\boldsymbol{y}} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{y}} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

I-2-12- potentiel complexe des vitesses et exemples d'écoulements plans

Lorsqu'un écoulement plan est conservatif et irrotationnel, il peut être complètement décrit au moyen d'une fonction analytique complexe appelée « **potentiel complexe des vitesses** ». Cette fonction complexe $f(z)$ comporte une partie réelle correspondant au potentiel des vitesses $\Phi(x,y)$ et une partie imaginaire correspondant à la fonction de courant $\Psi(x,y)$. On définit ainsi :

$$f(z) = \Phi + i\Psi \text{ où } z = x + iy = re^{i\theta}$$

I-2-12-1- Écoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$f(z) = Uz$ où U est une constante réelle. Par identification des parties réelle et imaginaire avec respectivement le potentiel des vitesses et la fonction de courant, on obtient :

$$f(z) = U(x+iy) = \Phi + i\Psi \quad \Rightarrow \begin{cases} \Phi = U\,x \\ \Psi = U\,y \end{cases}$$

Les lignes de courant sont alors définies par $\Psi = cte \Rightarrow U\,y = cte$, d'où $y = cte\ \forall x$: il s'agit donc de droites horizontales (toutes parallèles à l'axe x). Tandis que les équipotentielles sont définies par $\Phi = cte \Rightarrow U\,x = cte$, d'où $x = cte\ \forall y$: il s'agit alors de droites verticales (toutes parallèles à l'axe y). Comme il se doit, on remarque que les lignes de courant sont de fait orthogonales aux équipotentielles. On peut par ailleurs en déduire le champ de vecteurs vitesse en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel des vitesses :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U$$

$$\vec{V} = U\,\vec{e_x}$$

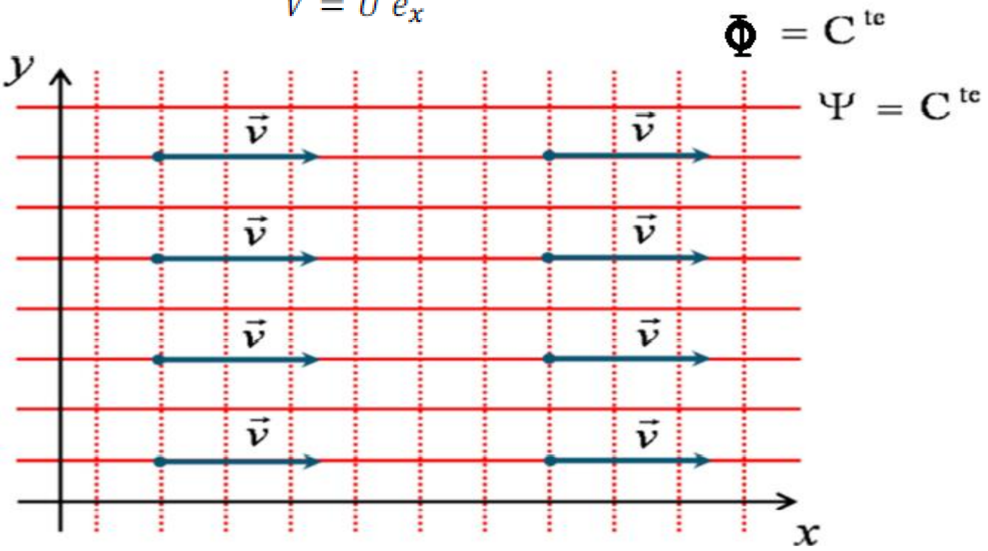

Figure I-13 Ecoulement rectiligne uniforme de vitesse U

I-2-12-2- Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$f(z) = C \ln z$ où C est une constante réelle. Pour faciliter le traitement mathématique, il conviendra de travailler préférentiellement en coordonnées cylindriques ; ainsi : $z = r e^{i\theta}$

$$f(z) = C\ ln\left(re^{i\theta}\right) = C\ lnr + iC\theta = \Phi + i\Psi$$

où l'on peut identifier le potentiel des vitesses (partie réelle) et la fonction de courant (partie imaginaire) :

$$\begin{cases} \Phi(r,\theta) = C\ lnr \\ \\ \Psi(r,\theta) = C\theta \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que $\Psi(r,\theta) = C\theta = cte \implies \theta = cte\ \forall r$, autrement dit il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. Les équipotentielles doivent vérifier que $\Phi(r,\theta) = C\ lnr = cte \implies r = cte\ \ \forall\theta$: il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère. On vérifie bien ainsi qu'en tout point de l'écoulement les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de courant. Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \\ \\ v = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial r} \end{cases} \implies \begin{cases} u = \dfrac{C}{r} \\ \\ v = 0 \end{cases} \ d'où\ \vec{V} = \frac{C}{r}\vec{e_r}$$

On a donc un **écoulement radial**, centré sur l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir **figure I-14**). On remarquera que selon le signe de la constante C, l'écoulement peut être divergent ou convergent : si $C > 0$ alors l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une **source à l'origine** ; si $C < 0$, l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un **puits à l'origine**.

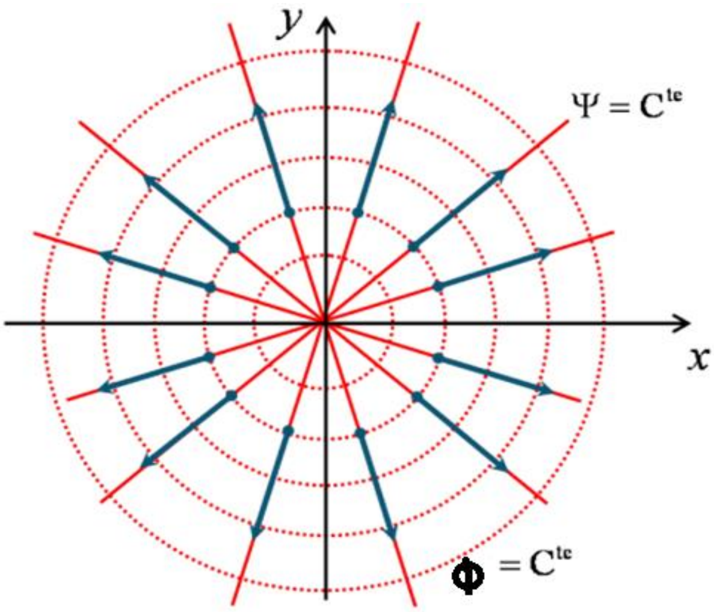

figure I-14

le débit volumique de l'écoulement radial à travers un cylindre d'axe Oz (perpendiculaire au plan de l'écoulement), de rayon r, et de hauteur $\Delta z=1$. L'écoulement ayant lieu à travers la surface latérale du cylindre, on peut calculer :

$$q_V=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\vec{v}\cdot\vec{n}\,r\,\mathrm{d}\theta\,\Delta z$$

où $\vec{n}=\vec{e}_r$ et $\vec{v}=C/r\,\vec{e}_r$.

On obtient donc :

$$q_V=\int_0^{2\pi}\frac{C}{r}r\,\mathrm{d}\theta=2\pi C\,\forall r$$

Ainsi, indépendamment du cylindre choisi, la constante C est égale, à 2π près, au débit généré par la source ou le puits. C'est la raison pour laquelle on formule communément l'écoulement généré par un puits ($q_V<0$) ou une source ($q_V>0$) par :

$$f(z)=\frac{q_V}{2\pi}\ln z$$

où q_V est le débit volumique par unité de hauteur de l'écoulement plan (en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$).

I-2-12-3- Remarque

Cette formulation vaut pour un puits ou une source centré à l'origine du repère. On peut très bien envisager un écoulement centré en un point quelconque du plan, de coordonnées $z_0=x_0+i\,y_0$, en formulant simplement $f(z)=\frac{q_V}{2\pi}\ln(z-z_0)$.

I-2-12-4- Vortex ou tourbillon libre

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$f(z) = -i\,C \ln z$ où C est une constante réelle. Une nouvelle fois, il est plus approprié de travailler dans un système de coordonnées cylindriques. Développons cette fonction pour identifier le potentiel des vitesses et la fonction de courant :

$$f(z) = -i\;C\;ln\left(re^{i\theta}\right) = C\;\theta - i\;Clnr = \Phi + i\Psi$$

d'où :

$$\begin{cases} \Phi(r,\theta) = C\;\theta \\ \Psi(r,\theta) = -C\;lnr \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que $\Psi(r,\theta) = -C\;lnr = cte\;\Rightarrow r = cte\;\forall$, autrement dit il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère. Les équipotentielles doivent vérifier que $\Phi(r,\theta) = C\;\theta = cte \Rightarrow \theta = cte\;\forall r$: il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. On vérifie encore qu'en tout point de l'écoulement les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de courant. Par ailleurs, le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \\ v = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = \dfrac{C}{r} \end{cases} \quad d'où\;\vec{V} = \frac{C}{r}\overrightarrow{e_\theta}$$

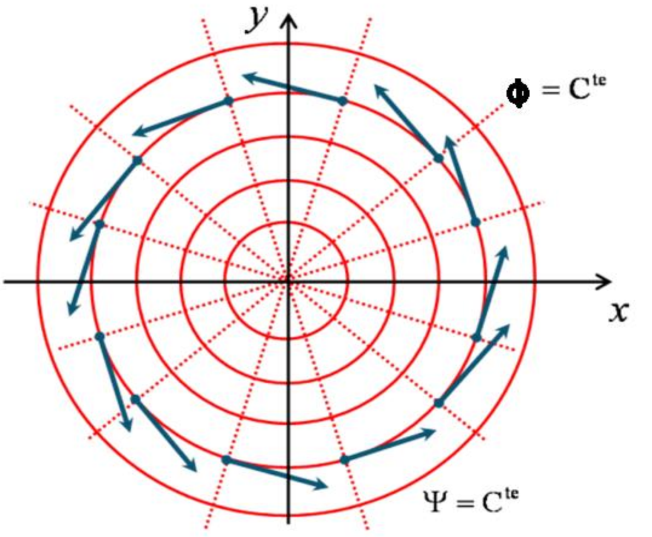

Figure I-15: écoulement orthoradial

On a donc un **écoulement orthoradial**, tournant autour de l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir **figure 48**). On notera la différence avec l'écoulement radial généré par un puits ou une source : les lignes de courant et les équipotentielles sont inter-changées. Par ailleurs, le signe de la constante C définit le sens de rotation : si $C>0$ le **vortex** tourne dans le sens trigonométrique ; si $C < 0$, il tourne dans le sens horaire.

La signification physique de la constante C est en rapport avec la **circulation du vecteur vitesse** autour de l'origine du vortex. Pour le comprendre, calculons la circulation du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant définie par un cercle de rayon r centré sur l'origine ; on a ainsi :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{v}\, r\, \mathrm{d}\theta\, \vec{e_\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r\, \mathrm{d}\theta = 2\pi C \;\forall r$$

On en déduit que la circulation est une propriété intrinsèque du vortex. En conséquence, on formulera plus communément le potentiel complexe des vitesses correspondant à un vortex en faisant apparaître sa circulation :

$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

où $\Gamma>0$ le fait tourner dans le sens trigonométrique et $\Gamma<0$ dans le sens horaire.

I-2-12-4-1-Remarque

Cette formulation vaut pour un vortex tournant autour de l'origine du repère. On peut très bien envisager un vortex tournant autour d'un point quelconque du plan, de coordonnées $z_0 = x_0 + i\, y_0$, en formulant simplement $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z - z_0)$.

I-2-12-5- Doublet et dipôle

Considérons l'association d'un puits et d'une source au sein d'un même écoulement plan. Positionnons la source de débit $+q$ en $(x=+a, y=0)$ et le puits de débit $-q$ en $(x=-a, y=0)$. Il s'agit alors de l'écoulement généré par un « **doublet** ». Puisque la superposition d'écoulements élémentaires s'opère par simple addition de leurs potentiels complexes des vitesses, l'association du puits et de la source se formule par :

$$f(z) = +\frac{q}{2\pi}\ln(z-a) - \frac{q}{2\pi}\ln(z+a)$$

Le traitement mathématique de cette fonction est simplifié en faisant appel à deux systèmes de coordonnées ; définissons alors deux repères cylindriques tels que :

$$z_1 = z - a = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = z + a = r_2 e^{i\theta_2}$$

et reformulons $f(z)$ en conséquence :

$$f(z) = \frac{q}{2\pi}(\ln z_1 - \ln z_2) = \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 + i\,\theta_1 - \ln r_2 - i\,\theta_2) = \frac{q}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Par identification de la partie réelle avec le potentiel des vitesses et de la partie imaginaire avec la fonction de courant, on obtient :

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

$$\Psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

Par définition, les lignes de courant sont telles que $\Psi = \mathrm{Cte}$ et conduisent à tracer des courbes vérifiant : $\alpha = \theta_1 - \theta_2 = \mathrm{Cte}$. La **figure I-16** montre alors que de telles courbes sont des cercles passant par l'origine du puits et l'origine de la source et ayant comme centre un point de l'axe y.
Sans faire le calcul du champ de vecteurs vitesse, on oriente intuitivement le parcours des particules fluides en constatant logiquement que l'écoulement diverge depuis la source et converge vers le puits.

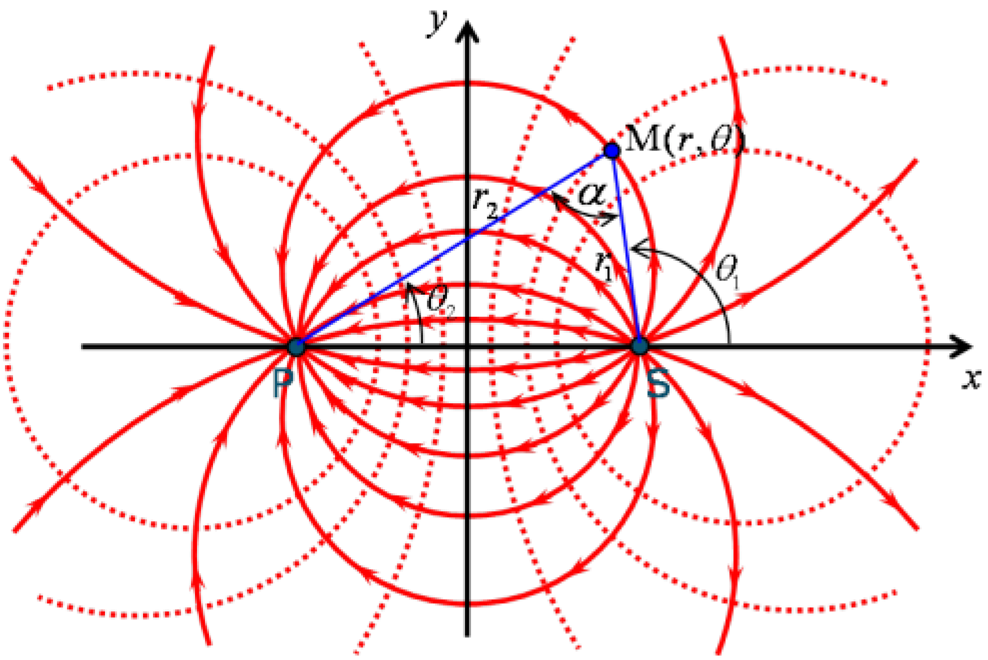

Figure I-16

III-Bibliographie

- Cours de Mécanique des Fluides Jean-François Sini To cite this version:
Jean-François Sini. Cours de Mécanique des Fluides. Engineering school. France. 2006, pp.213.
cel-00356205

- MECANIQUE RATIONNELLE Cours & exercices résolus Rappels sur les Vecteurs, Les Torseurs, Statique des Solides, Géométrie des Masses, Cinématique du Point et du Solide, Cinétique et Dynamique des Solides

- 3ème Année Licence Génie Mécanique Energétique Polycopié de la matière : MECANIQUE DES FLUIDES II Cours & Exercices corrigés *Fait par :* Docteur M'hamed BERIACHE *Maître de Conférences « A »*

- Mécanique des fluides pour l'ingénieurs présenté et animé par Joël zinsalo

- Polycopié d'exercice et examens résolus Mécanique des fluides M-bourich deuxième édition 2014