Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels et Nombres complexes

1.1 *Nombres réels*

1.1.1 *Définition axiomatique des nombres réels*

- *L'ensemble des nombres réels est un ensemble* $\mathbb{R}$ *dans lequel sont définies deux lois internes*

$$(x, y) \longrightarrow x + y \text{ (addition)}$$
$$(x, y) \longrightarrow x \times y \text{ (multiplication)}$$

- $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un corps commutatif et une relation d'ordre noté* $(\leq)\,(x \leq y \text{ ou } y \geq x)$.

  Satisfaisant les axiomes suivants:

a) $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un corps commutatif:*

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}; x + y = y + x$ *l'addition est commutative.*

2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}; (x + y) + z = x + (y + z)$ $(l'addition\ est\ associative)$.

3) $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}; x+0 = 0+x = x$ $(0$ *est l'élément neutre pour l'addition dans* $\mathbb{R})$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\,(-x) \in \mathbb{R}; x+(-x) = 0$ $((-x)$ *est l'élément symétrique de* x *dans* $\mathbb{R})$.

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}; x.y = y.x$ $(la\ multiplication\ est\ commutative)$.

6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}; (x.y)\,.z = x.\,(y.z)$ $(la\ multiplication\ est\ associative)$.

7) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}; x.1 = 1.x = x$ (1 *est l'élément neutre pour la multiplication dans* $\mathbb{R}$).

8) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}; x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$ (x^{-1} *est l'inverse de* x *dans* $\mathbb{R}$).

9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}; x.(y+z) = x.y + x.z$ (*distributivité de la multiplication sur l'addition*).

b) $\mathbb{R}$ *est un corps totalement ordonné:* (($\mathbb{R}, \leq$) *est une relation.*)

10) $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x$ (*réflexive*).

11) $\forall x, y \in \mathbb{R}; (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Longrightarrow x = y$ (*Antisymétrique*).

12) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}; (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$ (*relation transitive*).

c) **13)** $\forall x, y \in \mathbb{R}; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Longrightarrow x.y \geq 0.$

14) $\forall x, y \in \mathbb{R}; (x \leq y)$ *ou* $(y \leq x)$.

15) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}; x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z.$

16) *La relation* $x \leq y$ *(resp* $y \leq x$*) et* $x \neq y$ *noté* $x < y$ *(resp* $y < x$*).*

17) *Un nombre réel* x *est dit positif si* $x \geq 0$, *et négatif si* $x \leq 0$.

18) $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x, y \in \mathbb{R}_+ : x \leq y \iff x^n \leq y^n.$

19) $\forall n, m \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R}_+ : \begin{cases} x \leq 1 \ \text{ et } \ n \leq m \Longrightarrow x^n \geq x^m. \\ x \geq 1 \ \text{ et } \ n \leq m \Longrightarrow x^n \leq x^m. \end{cases}$

20) $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} 0 < x \leq y \iff 0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}. \\ x \leq y < 0 \iff \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} < 0. \\ x < 0 < y \iff \dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}. \end{cases}$

d) *Axiome de la borne supérieure:*

21) *Toute partie* A *non vide et majoré de* $\mathbb{R}$ *admet une bornée supérieure qu'on note* $\sup(A)$.

22) *Toute partie* A *non vide et minoré de* $\mathbb{R}$ *admet une bornée inférieure qu'on note* $\inf(A)$.

Remarque 1.1.1 *: Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$:

$A = \{x \in \mathbb{R}; x \in A\}.$

$-A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in A\}.$

On a: $\sup(A) = M \Longrightarrow \begin{cases} \inf(-A) = -M \Longleftrightarrow \inf(-A) = -\sup(A) \\ \sup(-A) = -\inf(A) \end{cases}$

Proposition 1.1.1 *: (Formule du binôme de Newton)*

Soient x et y deux réels et n un entier naturel non nul. On a:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}; \;\; 1! = 1 \;\; \text{et} \;\; 0! = 1.$$

Notation 1.1.1 *:*

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$.

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$.

1.1.2 *Intervalles de* $\mathbb{R}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ sont:

1. $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
2. ϕ l'ensemble vide.
3. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.
4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.
5. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.
6. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$.
7. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$.
8. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$.
9. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$.
10. $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$.

1.1.3 *Droite numérique achevée* $\overline{\mathbb{R}}$: *(Prolongement de* $\mathbb{R}$)

Définition 1.1.1 *: On note* $\overline{\mathbb{R}}$ *l'ensemble* $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *. Cet ensemble est appelé droite numérique achevée.*

Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$:

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'un ordre total $\leq$ prolongeant celui de $\mathbb{R}$ et défini en outre par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x \leq +\infty \text{ (en fait } -\infty < x < +\infty).$$

Opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$:

De même, on "étend" (de façon toujours commutative) les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ en posant:

1) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ x+(+\infty)=+\infty$ et $x+(-\infty)=-\infty.$

3) $(+\infty)(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)(-\infty)=+\infty, \quad (+\infty)(-\infty)=-\infty.$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x(+\infty)=-\infty$ et $x(-\infty)=+\infty.$

5) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x(+\infty)=+\infty$ et $x(-\infty)=-\infty.$

Formes indéterminées:

Comme on Ie voit, on ne donne pas de valeur aux expressions suivantes:

$$(+\infty)+(-\infty), \quad 0(-\infty), \quad 0(+\infty)$$

Ces expressions sont appelées formes indéterminées.

1.1.4 *Borne supérieure et borne inférieure*

Définition 1.1.2 *: Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide.*

1) *A est dit majoré si: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A; x \leq M$.*

Dans ce cas M est dit majorant de A.

i.e: $M \in \mathbb{R}$ *est un majorant de* $A \Longleftrightarrow \forall x \in A, x \leq M$.

- *Si l'ensemble $A\,(A \subseteq \mathbb{R})$ est un sous-ensemble majoré, on appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants et on le note* $\sup(A)$.

2) *A est dit minoré si:* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A; m \leq x$.

Dans ce cas m est dit minorant de A.

i.e: $m \in \mathbb{R}$ *est un minorant de* $A \Longleftrightarrow \forall x \in A, m \leq x$.

- *Si l'ensemble $A\,(A \subseteq \mathbb{R})$ est un sous-ensemble minoré, on appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants et on le note* $\inf(A)$.

3) *Un sous-ensemble $A\,(A \subseteq \mathbb{R})$ non vide est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.*

i.e: $A \subseteq \mathbb{R}$ *borné* $\Longleftrightarrow$ *A minoré et majoré.*

$$\Longleftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A; m \leq x \leq M.$$

Exemple 1.1.1 *:*

1) $\mathbf{A} =]-2, 8]\,, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} : -\mathbf{2} < \mathbf{x} \leq \mathbf{8}$.

les majorants de A est $[8, +\infty[$ *donc* $\sup A = 8$.

les minorants de A est $]-\infty, -2]$ *donc* $\inf A = -2$.

2) $A =]-\infty, 3]$

les majorants de A est $[3, +\infty[$ *donc* $\sup A = 3$ *et* $\inf A$ *n'existe pas.*

3) $A =]1, +\infty[$

les minorants de A est $]-\infty, 1]$ *donc* $\inf A = 1$ *et* $\sup A$ *n'existe pas.*

1.1.5 *Propriété caractéristique de la borne supérieure et la borne inférieure*

Théorème 1.1.1 *: Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ alors on a:*

$$M = \sup A \iff \begin{cases} 1) \forall x \in A; x \leq M \\ 2) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; M - \varepsilon < x \end{cases}$$

Théorème 1.1.2 *: Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$ alors on a:*

$$m = \inf A \iff \begin{cases} 1) \forall x \in A; x \geq m \\ 2) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; m + \varepsilon > x \end{cases}$$

1.1.6 *L'élément maximal et l'élément minimal*

Définition 1.1.3 *:*

1) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A, si $M \in A$ alors on dit que M est maximal de A et on note* $\max A$.

2) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A, si $m \in A$ alors on dit que m est minimal de A et on note* $\min A$.

Exemple 1.1.2 *:*

1) $A = \left]-\infty, 3\right], \forall x \in A : x \leq 3;$ *on a* $\sup A = 3$ *et* $3 \in A$ *donc* $\max A = 3$.

2) $A = \left[-1, +\infty\right[, \forall x \in A : x \geq -1;$ *on a* $\inf A = -1$ *et* $(-1) \in A$ *donc* $\min A = -1$.

3) $A = \left]-2, 5\right[, \forall x \in A : -2 < x < 5;$ *on a* $\sup A = 5$ *et* $\inf A = -2$, $-2 \notin A$ *donc* $\min A$ *n'existe pas. et* $5 \notin A$ *donc* $\max A$ *n'existe pas.*

Remarque 1.1.2 *:*

- *Si* $\max A$ *existe, alors* $\sup A$ *existe et* $\max A = \sup A$.
- *Si* $\min A$ *existe, alors* $\inf A$ *existe et* $\min A = \inf A$.
- *Si* $\sup A$ *existe et* $\sup A \notin A$ *donc* $\max A$ *n'existe pas.*

- *Si* $\inf A$ *existe et* $\inf A \notin A$ *donc* $\min A$ *n'existe pas.*

Exemple 1.1.3 *:*

$A = [-3, 4[\,, \sup A = 4 \notin A$ *donc* $\max A$ *n'existe pas, et* $\inf A = -3 \in A$ *donc* $\min A = -3$.

1.1.7 *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *vérifie l'axiome d'Archimède*

- *Axiome d'Archimède:*

  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que:* $n > x$.

  - Autrement dit l'ensemble $\mathbb{N}$ *n'est pas majoré dans* $\mathbb{R}$.

1.1.8 *Nombres rationnels et irrationnels:*

Définition 1.1.4 *:*

On note $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z}\ ,\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ *et* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
les éléments de $\mathbb{Q}$ *sont appelés nombres rationnels.*

Remarque 1.1.3 *:*

- *L'ensemble* $\mathbb{Q}$*; qui contient* $\mathbb{Z}$*, est stable pour les lois* $+$ *et* $\times$.
- *Muni des restrictions de ces lois; il est lui même un corps commutatif.*
- *En particulier l'inverse de tout élément de* $\mathbb{Q}^*$ *est encore dans* $\mathbb{Q}^*$.

Définition 1.1.5 *:*

Les éléments de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *sont appelés nombres irrationnels.*

1.1.9 *Densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$

Théorème 1.1.3 *:*

Soient x, y *deux nombres réels tels que* $x < y$*; il existe un nombre rationnel* $q \in \mathbb{Q}$ *tel que* $x < q < y$

i.e.: entre deux nombres réels il ya toujours un nombre rationnel. On traduit cette propriété on disant que $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

1.1.10 *Valeur absolue*

Définition 1.1.6 *: l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définis par:*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

est appelée valeur absolue, vérifiant les propriétés suivantes: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1) $x = 0 \Longrightarrow |x| = 0.$

2) $|x + y| \leq |x| + |y|.$

3) $|x \times y| = |x| \times |y|.$

4) *Si* $y \neq 0; \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}.$

5) $|x| \leq y \Longleftrightarrow -y \leq x \leq y; \forall y \geq 0.$

6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *et* $||x| - |y|| \leq |x + y|.$

1.1.11 *Partie entière d'un nombre réel*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *il existe un unique entier* $(n \in \mathbb{Z})$ *note* $E(x)$ *(ou bien* $[x]$*), appelé partie entière de* x*, vérifiant:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x \leq E(x) + 1.$$

Autrement dit $E(x)$ *est le plus grand entière inférieure ou égale* x $(n \leq x \leq n + 1; n \in \mathbb{Z}).$

- *Si* $x \in \mathbb{Z} : E(x) = x.$

Exemple 1.1.4 *:*

$$\begin{aligned} &E(0.3) = 0; \quad (0 \leq 0.3 \leq 0 + 1 = 1). \\ &E(3.3) = 3; \quad (3 \leq 3.3 \leq 3 + 1 = 4). \\ &E(-1.5) = -2; \quad (-2 \leq -1.5 \leq -2 + 1 = -1). \\ &E(-4) = -4. \\ &E(5) = 5. \end{aligned}$$

Application: *Soit* $A = \left\{ x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$

1) *Montrez de quelque soit* $\forall x_n \in A : \frac{1}{2} \leq x_n < 1.$

2) *Trouvez* $\sup A$ *et* $\inf A$.

3) *Montrez que* $\sup A = 1$.

Solution: 1) *On montre que:* $\forall x_n \in A : \frac{1}{2} \leq x < 1$

On a $\forall n \in \mathbb{N}; x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 2n < 2n+1 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{2n}{2n+1} < 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \times 0 \leq \frac{1}{2} \times \frac{2n}{2n+1} < \frac{1}{2} \times 1 \end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \leq x_n < 1.$$

2) *On a:* $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$ *alors* A *est borné c'est-à-dire* $\inf A$ *et* $\sup A$ *existe.*
on $x_0 = \frac{1}{2}$ *est un minorant de* A *et* $\frac{1}{2} \in A$ *alors* $\min A = \frac{1}{2} \Longrightarrow \inf A = \frac{1}{2}$.
et on a: 1 *plus petit majorant de* A *donc* $\sup A = 1$.

3) *On montre que* $\sup A = 1$

On utilise la propriété caractéristique de la borne supérieure,

$$\sup A = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \ 1 \text{ est majorant de } A \\ 2) \ \forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in A \,(n \in \mathbb{N})\,; x_n > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

Posons $x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} > 1 - \varepsilon$ *et cherchons* n *en fonction de* ε,

$$\begin{aligned}
x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} > 1 - \varepsilon &\implies -\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} > -\varepsilon \\
&\implies \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon \\
&\implies \frac{2n+1-2n}{2(2n+1)} < \varepsilon \\
&\implies \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \\
&\implies \frac{1}{2n+1} < 2\varepsilon \\
&\implies 2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon} \\
&\implies 2n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \\
&\implies n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\exists n = E\left(\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) + 1$ *alors* $\sup A = 1$.

1.2 *Nombres complexes*

1.2.1 *Définitions et notions générales*

1) *l'ensemble de nombres complexes* $\mathbb{C}$ *est sous la forme suivante:*

$$\mathbb{C} = \left\{z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\right\}$$

i.e: $\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy; \ \ x, y \in \mathbb{R}$.

- *Le nombre* x *est appelé la partie réelle de* z*, notée* $\mathrm{Re}(z)$.
- *Le nombre* y *est appelé la partie imaginaire de* z*, notée* $\mathrm{Im}(z)$.
- *Si* $y = 0$, z *est réel.*
- *Si* $x = 0$, z *est dit imaginaire.*

Exemple 1.2.1 *:*

$$1 + 3i \quad , \quad \sqrt{2} - \pi i \quad , \quad 4 \quad , \quad i \quad , \quad \sqrt{6}i \quad , \quad \frac{2}{3}i \quad , \quad 1 - \frac{4}{3}i$$

2) *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le nombre $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z.*

- *On vérifie immédiatement les propriétés suivantes:*

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \qquad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}; \qquad z - \overline{z} = 2yi;$$
$$z + \overline{z} = 2x; \qquad \overline{\overline{z}} = z.$$

3) *On appelle module de z te on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par:*

$|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *On vérifie les propriétés suivantes:*

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$ *on a:*

1) $|z| \geq 0$, *et* $|z| = 0 \Longrightarrow z = 0$.

2) $|z.z'| = |z| . |z'|$.

3) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

4) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; $z' \neq 0$.

5) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $z \neq 0$.

1.2.2 *Argument d'un nombre complexe*

Pour tout nombre complexe non nul $z = x + iy$, on appelle argument de z le nombre réel θ défini d'un multiple entier de 2π près par.

$\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$; $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$ *on note* $\theta = \arg(z)$.

i.e: $\arg(z) = \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$

Proposition 1.2.1 *:*

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes

- $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

1.2.3 *Forme trigonométrique*

Soit $z = x + iy$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *et* $\theta = \arg(z)$.

On a: $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$. *donc*

$z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

le nombre z *est entièrement déterminé par son module et son argument on note alors* $z = [|z|;\theta] = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$.

c'est la forme trigonométrique de z.

Cette représentation est très utile pour la multiplication et la division des nombres complexes:

$z_1 \times z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \times |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1| \times |z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Comme application immédiate, on a la relation suivante (formule de Moivre)

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \Longleftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Pour le calcul, on utilise suivant les expressions:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Application:

En développant la formule de Moivre à l'aide de la formule de binôme Newton, et en identifiant les parties réelles et imaginaires de polynômes en $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k$$

Tel que: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $C_n^n = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$; $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$; $0! = 1$.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= C_n^0(\cos\theta)^n(i\sin\theta)^0 + C_n^1(\cos\theta)^{n-1}(i\sin\theta)^1 + ... + C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k \\ &\quad + ... + C_n^n(\cos\theta)^0(i\sin\theta)^n\end{aligned}$$

On a:

$\cos n\theta = (\cos\theta)^n - C_n^2(\cos\theta)^{n-2}(\sin\theta)^2 + C_n^4(\cos\theta)^{n-4}(\sin\theta)^4 + ...$

$\sin n\theta = C_n^1(\cos\theta)^{n-1}(\sin\theta)^1 - C_n^3(\cos\theta)^{n-3}(\sin\theta)^3 + ...$

Donc $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Exemple 1.2.2 *:*

- $n = 2$:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \sum_{k=0}^{2} C_2^k (\cos\theta)^{2-k} (i\sin\theta)^k \\
&= C_2^0 (\cos\theta)^2 (i\sin\theta)^0 + C_2^1 (\cos\theta)^1 (i\sin\theta)^1 \\
&\quad + C_2^2 (\cos\theta)^0 (i\sin\theta)^2 \\
&= \underbrace{C_2^0 \cos^2\theta - C_2^2 \sin^2\theta}_{\cos 2\theta} + i\underbrace{C_2^1 \cos\theta \sin\theta}_{\sin 2\theta} \\
&= \cos 2\theta + i\sin 2\theta.
\end{aligned}$$

1.2.4 *Racines n-ièmes:*

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ *un nombre complexe et* n *un entier tel que* $n \geq 1$. *On cherche tous les nombres complexes* $w = \rho(\cos\delta + i\sin\delta) = \rho e^{i\delta}$ *tel que* $w^n = z$, *racines n-ièmes de* z.

$$w^n = z \Rightarrow \rho^n e^{in\delta} = re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\delta = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \delta = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

d'où expression n *racines n-ièmes de* z :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right); \qquad 0 \leq k \leq n-1$$

Cas particulier: $z = 1$ *les racines n-ièmes de* 1 *sont*

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right); \qquad 0 \leq k \leq n-1$$