# Chapitre 1

## Semi-Groupes Uniformément Continus

## Et

## Semi-Groupes Fortement Continus

# Les références Principales pour ce cours sont :

**1** - A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag 1983.

**2** - Milan Miklavčič. Applied functional analysis and partial differential equation. World Scientific 1998.

**3** - *Hiroki Tanabe*. Equations of evolution., *Monographs and Studies in Mathematics, No. 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.*

**4** - H. Brézis. Opérateurs Maximaux Monotones. Noth-Holland – 1973.

# CH I : Semi-groupes uniformément continus
# Semi-groupes fortement continus.

## I-1 - Semi-groupes uniformément continus

**Définition I-1 :**

Soit $X$ un espace de Banach. Une famille à un paramètre $T(t)$, $0 \leq t < +\infty$, d'opérateurs linéaires bornés de $X$ dans $X$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ si

(i) $T(0) = I$ ( $I$ est l'opérateur identité de $X$)

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$

(la propriété du semi groupe)

Le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, $T(t)$, est uniformément continu si

$$\lim_{t \to 0} \| T(t) - I \| = 0 \qquad (1-1)$$

## Définition I-2 :

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X \; ; \; \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\} \quad (1-2)$$

et

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \frac{d^+T(t)}{dt} x \Big|_{t=0} , \; x \in D(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de $A$.

## Remarque I-1 :

De la définition I-1 d'un semi-groupe unif continu d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$ on peut déduire que :

$$\lim_{s \to t} \| T(s) - T(t) \| = 0$$

## Théorème I-1 :

Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $A$ est un opérateur linéaire borné.

## Preuve :

Soit $A$ un opérateur linéaire borné sur $X$ et soit

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \qquad (1-3)$$

Le second membre de (1-3) qui est une série normalement convergente pour tout $t \geq 0$, elle définit un opérateur linéaire borné $T(t)$. Il est clair que $T(0) = I$ et

$$T(t+s) = T(t)\,T(s) \quad , \forall\, t, s \geq 0$$

En estimant la série (1-3) on aura :

$$\| T(t) - I \| \leq t \|A\| \, e^{t\|A\|}$$

et

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq t \|A\|^2 e^{t\|A\|}$$

ce qui prouve que $T(t)$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $X$, et que $A$ est son générateur infinitésimal.

Soit $T(t)$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés dans $X$.

Pour $\rho > 0$ fixé assez petit tel que

$\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s)\,ds \| < 1$ ce qui implique que $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s)\,ds$ est inversible et de là $\int_0^\rho T(s)\,ds$ sera aussi inversible alors on aura :

$$\frac{1}{h}\left(T(h) - I\right)\left(\int_0^\rho T(s)\,ds\right) = h^{-1}\left(\int_0^\rho T(s+h)\,ds - \int_0^\rho T(s)\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)\,ds - \int_0^h T(s)\,ds\right)$$

d'où

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,ds\right)\left(\int_0^\rho T(s)\,ds\right)^{-1} \qquad (1-4)$$

par passage à la limite quand $h \to 0$ (1-4) montre que $\frac{1}{h}(T(h)-I)$ converge en norme et donc fortement vers l'opérateur linéaire borné $(T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$

Remarque I-2 :

De la définition I-2 il est clair qu'un semi-groupe $T(t)$ a un unique générateur infinitésimal. Si $T(t)$ est uniformément continu alors son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. Comme nous l'avons démontré précédemment on sait que tout opérateur linéaire borné est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu la question qui se pose est : ce semi-groupe est-il unique ? la réponse est affirmative comme on peut le voir dans ce qui suit :

Théorème I-2:

Soient $T(t)$ et $S(t)$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés si

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h) - I}{h} = A = \lim_{h \to 0} \frac{S(h) - I}{h}. \qquad (1-5)$$

alors $T(t) = S(t)$ pour $t \geq 0$.

Preuve:

On va montrer que pour $T > 0$ donné $T(t) = S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$.

Soit $T > 0$ fixé. Alors puisque les applications $t \mapsto \|T(t)\|$ et $t \mapsto \|S(t)\|$ sont continues il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|T(t)\| \, \|S(s)\| \leq C \quad \text{pour } 0 \leq t, s \leq T$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ et d'après (1-5) il existe $\delta > 0$ tq :

$$\frac{1}{h}\|T(h) - S(h)\| < \frac{\varepsilon}{TC} \quad \text{pour } 0 \leq h \leq \delta \quad (1-6)$$

Soit $0 \leq t \leq T$ et choisissons $n \geq 1$ tq $\frac{t}{n} \leq \delta$, donc de la propriété du semi-groupe et de (1-6) on a :

$$\|T(t) - S(t)\| = \|T(n\tfrac{t}{n}) - S(n\tfrac{t}{n})\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T((n-k)\tfrac{t}{n})S(\tfrac{kt}{n}) - T((n-k-1)\tfrac{t}{n})S(\tfrac{(k+1)t}{n})\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T((n-k-1)\tfrac{t}{n})\| \, \|T(\tfrac{t}{n}) - S(\tfrac{t}{n})\| \, \|S(\tfrac{k t}{n})\|$$

$$\leq n\, C \frac{\varepsilon}{TC} \frac{t}{n} \leq \varepsilon$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire alors

$$T(t) = S(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire alors

$$T(t) = S(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

<u>Corollaire I-1</u>:

Soit $T(t)$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés.

Alors :

a) Il existe une constante $\omega \geq 0$ tq

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$$

b) Il existe un unique opérateur linéaire borné $A$ tq $T(t) = e^{tA}$

c) L'opérateur $A$ dans b) n'est autre que le générateur infinitésimal de $T(t)$.

d) $t \mapsto T(t)$ est différentiable en norme et

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$$

Preuve:

Toutes les assertions du corollaire I-1 découlent directement de b). Pour prouver b) on sait que le générateur infinitésimal de $T(t)$ est un opérateur linéaire borné $A$, et d'après le théorème I-2 on a : $T(t)=e^{tA}$.

## I-2 Semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés:

Dans toute la suite $X$ désigne un espace de Banach.

**Définition I-3:**

Un semi-groupe $T(t), 0 \leq t < +\infty$, d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ est dit semi-groupe fortement continu si

$$\lim_{h \to 0} T(h)x = x \quad , \forall x \in X . \quad (2-1)$$

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur $X$ est appelé un semi-groupe de classe $C_0$ ou simplement un $C_0$ semi-groupe

Théorème I-3 :

Soit $T(t)$ $C_0$-semi-groupe, alors il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tq :

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \text{ pour } 0 \leq t < +\infty \qquad (2-2)$$

Preuve :

On va montrer d'abord qu'il existe $\eta > 0$ tq :

$\|T(t)\|$ est borné pour $0 \leq t \leq \eta$.

Supposons que ceci n'est pas vrai donc il existerait une suite $\{t_n\}$ tq $t_n \geq 0$, $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$ et $\|T(t_n)\| \geq n$. Alors d'après le principe de la borne uniforme (ie Théo Banach-Steinhaus) ... il s'ensuit que pour un certain $x \in X$ $\|T(t_n)x\|$ est non borné ce qui est contraire à (2-1). Donc $\|T(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq \eta$ et puisque $\|T(0)\| = 1$ donc $M \geq 1$. Soit $\omega = \eta^{-1} \log M$. Pour $t \geq 0$ on a $t = n\eta + \delta$ où $0 \leq \delta < \eta$ et de la propriété du semi-groupe on a :

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)\,T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq M\,M^{\frac{t}{\eta}}$$

$$\leq M\,e^{wt}$$

Corollaire I-2 :

Si $T(t)$ est un $C_0$ semi-groupe alors pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $X$.

Preuve :

Soient $t, h \geq 0$. La continuité de $t \mapsto T(t)x$ se déduit de :

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\|\,\|T(h)x - x\|$$
$$\leq M e^{wt}\,\|T(h)x - x\|$$

pour $t \geq h \geq 0$

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\|\,\|x - T(h)x\|$$
$$\leq M e^{wt}\,\|x - T(h)x\|$$

## Théorème I-4 :

Soit $T(t)$ un $C_0$-semi-groupe et soit $A$ son générateur infinitésimal. Alors

a) Pour $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x \qquad (2\text{-}3)$$

b) Pour $x \in X$, $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ et

$$A\left(\int_0^t T(s)x \, ds\right) = T(t)x - x \qquad (2\text{-}4)$$

c) Pour $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} T(t)x = A\,T(t)x = T(t)Ax. \qquad (2\text{-}5)$$

d) Pour $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau = \int_s^t A\,T(\tau)x\,d\tau. \qquad (2\text{-}6)$$

Preuve :

a) se déduit directement du corollaire précédent i.e. de la continuité de la fonction $t \mapsto T(t)x$.

Prouvons b) et soient $x \in X$ et $h > 0$ alors :

$$\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t \left(T(s+h)x - T(s)x\right)ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds$$

et puisque le second membre tend vers $T(t)x - x$ quand $h \to 0$ ce qui prouve b)

Pour démontrer c) on prend $x \in D(A)$ et $h > 0$. Alors

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)x$$

$$\longrightarrow T(t)Ax \quad \text{quand } h \to 0 \qquad (2.7)$$

alors $T(t)x \in D(A)$ et $AT(t)x = T(t)Ax$

et (2.7) implique aussi que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

i.e que la dérivée à droite de $T(t)x$ est $T(t)Ax$. Pour démontrer (2.5) il ne reste qu'à prouver que la dérivée à gauche de $T(t)x$ existe pour $t>0$, et est égale à $T(t)Ax$, ce qui découle directement de:

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) + \lim_{h\to 0^+}\left(T(t-h)Ax - T(t)Ax\right)$$

puisque $x \in D(A)$ et $\|T(t-h)\|$ est borné sur $0 \le h \le t$

donc

$$\lim_{h\to 0^+} T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) = 0$$

et puisque $T(t)$ est un $C_0$ semi-groupe alors

$$\lim_{h \to 0^+} \left( T(t-h)Ax - T(t)Ax \right) = 0 .$$

d'où

$$\lim_{h \to 0^+} \left( \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right) = 0 .$$

ce qui termine la démonstration de c)

d) est une conséquence directe de c) par une simple intégration de (2.5) de $s$ à $t$.

<u>Corollaire I.3</u> :

Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe $T(t)$ alors

(i) $D(A)$, le domaine de $A$, est dense dans $X$

(ii) $A$ est un opérateur linéaire fermé

Preuve:

Pour tout $x \in X$ soit $x_h = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds$.

D'après la partie b) du théorème I-4 on a:

$x_h \in D(A)$ pour $h>0$ et de la partie

a) du même théorème I-4 on sait que $x_h \to x$ quand $h \to 0$ donc $\overline{D(A)} = X$.

La linéarité de A est évidente elle découle directement de la définition de A donc il reste à montrer que A est fermé i.e.

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{array}\right. (n \to +\infty) \Rightarrow \begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y \end{array}$$

D'après la partie d) du théorème I-4 on a:

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds \qquad (*)$$

puisque $Ax_n \to y$ ce qui implique que

$T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$ unif sur tout intervalle fermé borné et par conséquent par passage à la limite dans $(*)$ on aura:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds \qquad (**)$$

donc si on divise les deux membres de $(**)$ par $t > 0$ et en passant à la limite lorsque $t \to 0$ on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ ce qui démontre que $A$ est fermé.

<u>Théorème I-5</u>:

Soient $T(t)$ et $S(t)$ deux $C_0$ semi-groupes d'opérateurs linéaires continus et $A, B$ leurs générateurs infinitésimaux respectifs. Si $A = B$ alors $T(t) = S(t)$ pour $t \geq 0$.

<u>Preuve</u>:

Soit $x \in D(A) = D(B)$. D'après le théorème I-4 partie c) on peut facilement voir que la fonction $s \mapsto T(t-s).S(s)x$ est différentiable et que

$$\frac{d}{ds} T(t-s) S(s) x = -A\,T(t-s) S(s) x + T(t-s) B S(s) x$$

$$= -T(t-s) A S(s) x + T(t-s) B S(s) x = 0$$

c'est-à-dire que la fonction $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ est constante et en particulier ses valeurs pour $s=0$ et $s=t$ coïncident donc

$$T(t)x = S(t)x$$ et ceci est vrai $\forall x \in D(A)$ et puisque $D(A)$ est dense dans $X$ et $T(t)$, $S(t)$ sont bornés alors

$$T(t)x = S(t)x \quad \forall x \in X.$$

**Théorème I-6 :**

Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe $T(t)$. Si $D(A^n)$ est le domaine de $A^n$, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ est dense dans $X$.

**Lemme I-1 :**

Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe $T(t)$ tq

$$\|T(t)\| \leq M_0 \quad \text{pour } t \geq 0$$

Si $x \in D(A^2)$ alors

$$\|Ax\|^2 \leq 4M_0^2 \|A^2x\| \|x\| \qquad (2-8)$$

Preuve:

En utilisant la relation (2-6) de la partie d) du théorème I-4 on peut facilement vérifier que pour $x \in D(A^2)$ on a:

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x\,ds.$$

d'où

$$\|Ax\| \leq \frac{1}{t}\left(\|T(t)x\| + \|x\|\right) + \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)\|T(s)A^2x\|ds$$

$$\leq \frac{2M_0}{t}\|x\| + \frac{M_0 t}{2}\|A^2x\| \qquad (2-9)$$

où on a utilisé $M_0 \geq 1$ (car $\|T(0)\| = 1$).

Si $A^2x = 0$ donc de (2-9) on déduit que $Ax = 0$ et (2-8) est satisfaite

Si $A^2x \neq 0$ on peut prendre $t = \frac{2\|x\|^{\frac{1}{2}}}{\|A^2x\|^{1/2}}$ dans (2-9) et (2-8) s'ensuit.

## I-3 Théorème de Hille-Yosida

Soit $T(t)$ un $C_0$-semi-groupe. D'après le théo I-3 on sait qu'il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tq

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt} \quad , \quad \forall t \geq 0 \qquad (*)$$

**Définition I-4 :**

Si dans $(*)$ on a $w = 0$ alors le $C_0$ semi-groupe $T(t)$ est appelé un $C_0$ semi-groupe uniformément borné et si de plus $M = 1$ alors il est appelé un $C_0$ semi-groupe de contractions.

Dans la suite on va caractériser le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

**Définition I-5 :**

Si $A$ est un opérateur linéaire dans $X$ (pas nécessairement borné) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de $A$ est l'ensemble des nombres complexes $\lambda$ tq $\lambda I - A$ est inversible ie $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné dans $X$. qu'on note par :

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A)$$

qui est appelé la résolvante de $A$.

<u>Théorème I-7</u> : (Hille-Yosida)

Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions $T(t)$, $t \geq 0$ si et seulement si

(i) $A$ est fermé et $\overline{D(A)} = X$

(ii) l'ensemble résolvant de $A$ contient $\mathbb{R}_*^*$ et $\forall \lambda > 0$ on a :

$$\| R(\lambda ; A) \| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (3-1)$$

<u>Preuve</u> ; (la condition nécessaire)

Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe d'après le corollaire I-3 $A$ est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

Pour $\lambda > 0$ et $x \in X$ soit

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \qquad (3-2)$$

Puisque $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue et uniformément bornée donc l'intégrale dans (3-2) existe, comme étant une intégrale impropre de Riemann, qui définit un opérateur linéaire $R(\lambda)$ tq :

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\| \qquad (3-3)$$

En plus, pour $h > 0$

$$\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt$$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt. \qquad (3-4)$$

Lorsque $h \xrightarrow{>} 0$ le second membre de (3-4) converge vers $\lambda R(\lambda)x - x$. ce qui implique que pour tout $x \in X$ et $\lambda > 0$ on a

$$R(\lambda)x \in D(A) \text{ et } AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$$

i.e.

$$(\lambda I - A) R(\lambda) = I \quad . \qquad (3-5)$$

Pour $x \in D(A)$ on a, aussi :

$$R(\lambda)Ax = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) Ax \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} A T(t) x \, dt$$

$$= A\left( \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x \, dt \right) = A R(\lambda) x \qquad (3-6)$$

(où on a utilisé le fait que $AT(t)x = T(t)Ax$ et que $A$ est fermé) donc de (3-5) et (3-6) on peut déduire que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A) \qquad (3-7)$$

Donc $R(\lambda)$ est l'inverse de $\lambda I - A$, qui existe pour tout $\lambda > 0$ et satisfait à (3-1).

Pour démontrer que les conditions (i) et (ii) sont suffisantes pour que $A$ soit le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions on a besoin de quelques résultats.

**Lemme I-2 :**

Soit $A$ un opérateur qui satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème I-7 et soit $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda ; A) x = x, \quad \forall x \in X \quad (3-8)$$

**Preuve :**

Supposons que $x \in D(A)$ alors

$$\| \lambda R(\lambda : A) x - x \| = \| A R(\lambda ; A) x \| = \| R(\lambda ; A) A x \|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \| A x \| \to 0, \quad \lambda \to +\infty$$

et puisque $\overline{D(A)} = X$ et que $\| \lambda R(\lambda : A) \| \leq 1$

donc $\lambda R(\lambda : A) x \to x$ lorsque $\lambda \to +\infty$, $\forall x \in X$.

Définissons maintenant, pour tout $\lambda > 0$, l'approximation Yosida de $A$ par :

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I .$$

(régularisée Yosida) (3-9)

$A_\lambda$ est une approximation de $A$ dans le sens qui suit :

Lemme I-3 :

Soit $A$ un opérateur qui satisfait aux conditions (i) et (ii) du théorème I-7. Si $A_\lambda$ est l'approximation Yosida de $A$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax \quad , \forall x \in D(A)$$

(3-10)

Preuve :

Pour $x \in D(A)$ on a d'après le lemme I-2 et la définition de $A_\lambda$ (i.e (3-9))

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda : A) Ax = Ax$$

Lemme I-4 :

Soit A un opérateur qui satisfait aux conditions (i) et (ii) du théorème I-7. Si $A_\lambda$ est l'approximation yosida de A, alors $A_\lambda$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu de contractions et de plus on a

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \qquad (3-11)$$

$\forall x \in X, \quad \lambda, \mu > 0.$

Preuve :

De la relation (3-9) il est clair que $A_\lambda$ est un opérateur linéaire borné donc c'est le générateur infinitésimal du semi-groupe unif continu $e^{tA_\lambda}$ et on a aussi :

$$\| e^{tA_\lambda} \| = e^{-\lambda t} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda : A)} \|$$

i.e.

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \leq 1 \quad (3\text{-}12)$$

donc $e^{tA_\lambda}$ est un semi-groupe de contractions
Il est clair que d'après les définitions de $A_\lambda$, $A_\mu$, $e^{tA_\lambda}$ et $e^{tA_\mu}$ commutent entre eux et par conséquent

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\right) ds \right\|$$

$$\leq \int_0^1 t \| e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\| ds$$

$$\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|$$

<u>Preuve du Théorème I-7</u> (la réciproque)
Soit $x \in D(A)$. Alors

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\| \quad (3\text{-}13)$$

Donc de (3-13) et du lemme I-3

on peut déduire que pour $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge lorsque $\lambda \to +\infty$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle borné. Puisque $D(A)$ est dense dans $X$ et $\| e^{tA_\lambda} \| \leq 1$ il s'ensuit que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x \quad , \forall x \in X \qquad (3-14)$$

Cette limite dans (3-14) est aussi uniforme sur tout intervalle borné. De (3-14) il est bien clair que la limite $T(t)$ satisfait aux propriétés du semi-groupe, i.e que $T(0) = I$ et $\| T(t) \| \leq 1$, on a aussi $t \mapsto T(t)x$ est continue pour $t \geq 0$ comme limite uniforme des fonctions continues $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$. Donc $T(t)$ est un $C_0$ semi-groupe de contractions.

Pour terminer la démonstration il reste à montrer que $A$ est effectivement le le générateur infinitésimal de $T(t)$.

Soit $x \in D(A)$ donc en utilisant la relation (3-14) et le théorème I-4 (ii)

on a:

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} \left( e^{tA_\lambda} x - x \right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds = \int_0^t T(s) A x \, ds$$

(3-15)

la dernière égalité vient du fait que la convergence de $e^{tA_\lambda} A_\lambda x$ vers $T(t)Ax$ est uniforme sur tout intervalle borné.

Soit $B$ le générateur infinitésimal de $T(t)$ et soit $x \in D(A)$. En divisant (3-15) par $t>0$ et en passant à limite lorsque $t \to 0$

on voit que $x \in D(B)$ et que $Bx = Ax$

donc $A \subseteq B$. Puisque $B$ est le générateur infinitésimal de $T(t)$, alors d'après la condition nécessaire du théorème I-7 $1 \in \rho(B)$ et d'un autre côté d'après (ii) $1 \in \rho(A)$ et puisque $A \subseteq B$ donc

$(I-B)D(B) = (I-A)D(A) = X$ ce qui implique

que $D(B) = (I-B)^{-1}X = D(A)$ et

alors $A = B$.

<u>Corollaire I-4</u> :

Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions $T(t)$.
Si $A_\lambda$ est l'approximation Yosida de $A$

alors

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda} x \quad , \quad \forall x \in X \qquad (3\text{-}16)$$

<u>Preuve</u> :

Dans la démonstration du théorème I-7.
nous avons montré que le second membre de (3-16) définit un semi-groupe fortement continu $S(t)$ tq $A$ est son générateur infinitésimal alors il s'ensuit que $T(t) = S(t)$ (d'après le théo I-5)

## Corollaire I-5 :

Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions $T(t)$.
L'ensemble résolvant de $A$ contient le demi-plan ouvert $\{\lambda ; Re\lambda > 0\}$.

ie $\rho(A) \supset \{\lambda ; Re\lambda > 0\}$

et pour de tels $\lambda$ on a :

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda} \qquad (3-17)$$

## Preuve :

L'opérateur $R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$ est bien défini pour $\lambda$ tq $Re\lambda > 0$.
et dans la démonstration du théo I-7 on a montré que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ ce qui prouve que $\{\lambda : Re(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$.
L'estimation (3-17) est évidente.

## Remarque I-3 :

Soit $T(t)$ un $C_0$ semi-groupe qui satisfait $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ (pour un $w > 0$) donc si on considère $S(t) = e^{-wt} T(t)$, $S(t)$ serait un $C_0$ semi-groupe de contractions. Si $A$ est le générateur infinitésimal du $C_0$ semi-groupe $T(t)$ alors $A - wI$ est le générateur infinitésimal de $S(t)$.

D'un autre côté si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions $S(t)$, alors $A + wI$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe tq $\|T(t)\| \leq e^{wt}$. En effet $T(t) = e^{wt} S(t)$.

Ce qui nous permettra de caractériser le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe satisfaisant à

$$\|T(t)\| \leq e^{wt}.$$

## Corollaire I-6 :

Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe tq $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ si et seulement si

(i) $A$ est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

(ii) L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de $A$ contient la demi-droite $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda > w\}$ et

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w} \qquad (3\text{-}18)$$

## I-4 – Théorème de Lumer-Phillips :

Dans la section précédente d'après le théorème de Hille-Yosida on a pu caractéser le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe. De même dans cette section on va donner une autre caractérisation pour de tels générateurs infinitésimaux. Pour cela on a besoin de quelques préliminaires.

Soit $X$ un espace de Banach et soit $X^*$ son dual.

**Définition I - 6:**

Pour tout $x \in X$ on définit l'ensemble de dualité $F(x) \subseteq X^*$ par:

$$F(x) = \{ f \in X^* \,/\, \langle f / x \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \} \quad (4-1)$$

D'après le Théorème de Hahn-Banach on sait que $F(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$.

**Définition I- 7:**

Un opérateur linéaire $A$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ il existe $f \in F(x)$ tq

$$Re\langle f / Ax \rangle \leq 0$$

## Théorème I-8 :

Un opérateur linéaire $A$ est dissipatif si et seulement si

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad , \forall x \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0 \quad (4\text{-}2)$$

Preuve :

Soit $A$ un opérateur dissipatif, $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

Si $f \in F(x)$ et $Re\langle f / Ax\rangle \leq 0$

alors

$$\|\lambda x - Ax\| \, \|x\| \geq |\langle f / \lambda x - Ax\rangle| \geq Re\langle f / \lambda x - Ax\rangle$$

$$\geq \lambda \|x\|^2$$

ie (4-2) est vérifiée.

Réciproquement : Soit $x \in D(A)$ et supposons que $\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|$, $\forall \lambda > 0$.

Si $f_\lambda \in F(\lambda x - Ax)$ et $g_\lambda = f_\lambda / \|f_\lambda\|$

alors $\|g_\lambda\| = 1$. et on a :

$$\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = \langle g_\lambda / \lambda x - Ax \rangle$$

$$\leq \lambda \, Re \langle g_\lambda / x \rangle - Re \langle g_\lambda / Ax \rangle$$

$$\leq \lambda \|x\| - Re \langle g_\lambda / Ax \rangle$$

pour tout $\lambda > 0$. Donc

$$Re \langle g_\lambda / Ax \rangle \leq 0 \text{ et } Re \langle g_\lambda / x \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \qquad (4-3)$$

Puisque la boule unité de $X^*$ est compacte pour la topologie faible* donc de la suite $(g_\lambda)$ on peut en extraire une sous suite convergente vers $g \in X^*$, quand $\lambda \to +\infty$ par la topologie faible* et $\|g\| \leq 1$.

De la relation (4-3) il s'ensuit alors que $Re \langle g / Ax \rangle \leq 0$ et que

$Re \langle g / x \rangle \geq \|x\|$, mais on sait

que $Re \langle g / x \rangle \leq |\langle g / x \rangle| \leq \|x\|$

ie $\langle g / x \rangle = \|x\|$

Prenons $f = \|x\| g$. on aura $f \in F(x)$

et $\quad Re < f / Ax > \leq 0$

ie que $A$ est dissipatif.

<u>Théorème I-9</u> : (Lumer-Phillips)

Soit $A$ un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans $X$.

(a) Si $A$ est dissipatif et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tq $Im(\lambda_0 I - A) = X$, alors $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions dans $X$.

(b) Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions dans $X$, alors $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$ et $A$ est dissipatif. Et encore plus pour tout $x \in D(A)$ et tout $f \in F(x)$, $Re < f / Ax > \leq 0$

Preuve :

Soit $\lambda > 0$, puisque $A$ est dissipatif donc d'après le théorème I-8 on a :

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\| \;,\; \forall \lambda > 0 \text{ et } \forall x \in D(A) \quad (4-4)$$

Puisque $Im(\lambda_0 I - A) = X$, il s'ensuit de (4-4) pour $\lambda = \lambda_0$ que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné donc fermé et alors $\lambda_0 I - A$ serait fermé donc $A$ est aussi un opérateur fermé.

Si $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$ donc

$]0, +\infty[ \subset \rho(A)$ et $\|R(\lambda ; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$

(d'après (4-4)). Donc d'après le théorème de Hille-Yosida $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe de contractions.

Pour terminer la preuve de (a) il faut montrer que $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.
Considérons l'ensemble :

$$\Lambda = \{ \lambda : 0 < \lambda < \infty \text{ et } Im(\lambda I - A) = X \}$$

soit $\lambda \in \Lambda$. Donc d'après (4-4) $\lambda \in \rho(A)$
Puisque $\rho(A)$ est ouvert alors il existe un voisinage de $\lambda$ qui est contenu dans $\rho(A)$ et par suite l'intersection de ce voisinage avec la droite réelle est dans $\Lambda$ ie $\Lambda$ serait ouvert.
D'autre part soit $(\lambda_n) \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$, alors pour $y \in X$ $\exists (x_n) \in D(A)$ tq

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \qquad (4-5)$$

Donc de (4-4) il s'ensuit que

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|y\| \leq C$$

pour un certain $C > 0$

Alors

$$\lambda_m \| x_n - x_m \| \leq \| \lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m) \|$$

$$= |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\| \leq c\, |\lambda_n - \lambda_m| \qquad (4-6)$$

donc $\{x_n\}$ est une suite de cauchy.

alors $\exists\, x \in X$ tq $x_n \to x$ donc

de (4-5) $Ax_n \to \lambda x - y$ et

puisque $A$ est fermé donc $x \in D(A)$

et $\lambda x - Ax = y$. et que $Im(\lambda I - A) = X$

et alors $\lambda \in \Lambda$ donc $\Lambda$ est

aussi un fermé dans $]0, +\infty[$.

et puisque $\lambda_0 \in \Lambda$ par hypothèse

$\Lambda \neq \phi$ alors $\Lambda = ]0, +\infty[$

ce qui termine la démonstration de

(a)

Montrons maintenant (b). Si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe de contractions, $T(t)$, sur $X$, alors d'après le théorème de Hille-Yosida $]0,\infty[\subset \rho(A)$ et par suite $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.
Donc si $x \in D(A)$ et $f \in F(x)$ alors

$$|< f \,/\, T(t)x >| \leq \|f\| \, \|T(t)x\|$$
$$\leq \|x\|^2$$

et de là :

$$Re < f \,/\, T(t)x - x > = Re < f \,/\, T(t)x > - \|x\|^2$$
$$\leq 0 \qquad (4-7)$$

en divisant (4-7) par $t>0$ et en passant à la limite $t \searrow 0$ on aura :

$$Re < f \,/\, Ax > \leq 0 \qquad (4-8)$$

$\forall f \in F(x)$. Ce qui termine la démonstration de (b)

## Corollaire I-7 :

Soit $A$ un opérateur linéaire fermé à domaine dense. Si $A$ et $A^*$ sont dissipatifs alors $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur $X$.

**Preuve :**

D'après le théorème I-9 il est suffisant de montrer que $Im(I-A) = X$. Puisque $A$ est dissipatif et fermé $Im(I-A)$ est un sous-espace fermé de $X$. Si $Im(I-A) \neq X$ alors il existe $f \in X^*$ (d'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach) $f \neq 0$

tq $\langle f / x - Ax \rangle = 0, \ \forall x \in D(A)$ ce

qui implique que $f - A^* f = 0$. Puisque $A^*$ est aussi dissipatif donc $f = 0$ ce qui donne une contradiction et de là $Im(I-A) = X$.

Donnons maintenant quelques propriétés des opérateurs dissipatifs.

<u>Théorème I-10 :</u>

Soit $A$ un opérateur dissipatif dans $X$.

(a) Si pour un certain $\lambda_0 > 0$ $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ alors $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.

(b) Si $A$ est fermable alors $\bar{A}$, la fermeture de $A$, est aussi dissipatif.

(c) Si $\overline{D(A)} = X$ alors $A$ est fermable.

<u>Preuve :</u>

(a) se démontre de la même manière que dans la partie (a) du théorème I-9

Pour montrer (b) soit $x \in D(\bar{A})$, $y = \bar{A}x$ alors il existe une suite $\{x_n\} \subset D(A)$. tq $x_n \to x$ et $Ax_n \to y = \bar{A}x$ du théorème I-... il s'ensuit que $\|\lambda x_n - Ax_n\| \geq \lambda \|x_n\|$, $\lambda > 0$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$ on aura:

$$\|\lambda x - \bar{A}x\| \geq \lambda \|x\| \quad , \quad \forall \lambda > 0 \quad (4-9)$$

Puisque (4-9) est vraie pour tout $x \in D(\bar{A})$ alors $\bar{A}$ est dissipatif d'après le théorème I-8.

Pour montrer (C) supposons que $A$ n'est pas fermable. Alors on peut trouver une suite $\{x_n\} \subset D(A)$ $x_n \to 0$ et $Ax_n \to y$ avec $\|y\| = 1$. D'après le théorème I-8 on a pour tout $t > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|(x + t^{-1}x_n) - tA(x + t^{-1}x_n)\| \geq \|x + t^{-1}x_n\|$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$ et ensuite $t \to 0$ on aura:

$$\|x - y\| \geq \|x\| \quad , \forall x \in D(A)$$

Mais ceci est impossible si $D(A)$ est dense dans $X$ et par suite $A$ est fermable.

Théorème I- 11 :

Soit $A$ un opérateur dissipatif tq $Im(I-A) = X$. Si $X$ est un espace réflexif alors $\overline{D(A)} = X$

Preuve :

soit $f \in X^*$ tq $\langle f / x \rangle = 0$, $\forall x \in D(A)$.

On doit montrer que $f = 0$. Puisque $Im(I-A) = X$ il est suffisant de montrer que $\langle f / x - Ax \rangle = 0$, $\forall x \in D(A)$ ce qui est équivalent à $\langle f / Ax \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$. Soit $x \in D(A)$ d'après le théorème I-10 (a) il existe $x_n \in D(A)$ tq $x = x_n - (\frac{1}{n}) Ax_n$. Puisque $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$ alors $x_n \in D(A^2)$

et $Ax = Ax_n - \frac{1}{n} A^2 x_n$ ie $Ax_n = (I - \frac{1}{n}A)^{-1} Ax$.

Du théorème I-8 on sait que

$$\|(I - (\tfrac{1}{n})A)^{-1}\| \leq 1$$

alors

$$\|Ax_n\| \leq \|Ax\|$$

de même

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{n}\|Ax_n\| \leq \frac{1}{n}\|Ax\|$$

ce qui prouve que $x_n \to x$. Puisque $\|Ax_n\| \leq C$ et que $X$ est réflexif alors il existe une sous-suite $\{Ax_{n_k}\}$ qui est faiblement convergente ie

$$Ax_{n_k} \longrightarrow y \text{ faiblement}$$

Puisque aussi $A$ est fermé il s'ensuit que $y = Ax$.

Finalement, puisque $\langle f / z \rangle = 0$, $\forall z \in D(A)$

on a :

$$\langle f / A x_{n_k} \rangle = n_k \langle f / x_{n_k} - x \rangle = 0$$

par passage à la limite on aura :

$$\langle f / A x \rangle = 0 \quad , \forall x \in D(A)$$

ie $f = 0$ et donc $\overline{D(A)} = X$.