Chapitre 2
Contraintes dans le sol

1. Introduction :

L'estimation des contraintes générées dans d'une masse de sol est indispensable à la vérification de deux problèmes majeurs rencontrés dans les ouvrages de génie civil : les déformations des sols (changement de volume du sol résultant de la charge), et la résistance (stabilité des fondations).

La distribution des contraintes dans le sol est généralement causée par les deux éléments suivants :

- Contraintes dues au poids propre du sol (contraintes initiales).
- Contraintes dues aux surcharges appliquées à la surface.

2. Contraintes dues au poids propre du sol :

2.1. Contraintes verticales totales :

La contrainte est une force divisée par une surface, son unité est de **kN/m²**. Les forces peuvent être des forces de surface ou de volume. Pour les sols au repos, les contraintes dépendent de la force qui résulte du poids propre du sol.

Si l'on a un massif de sol fin saturé, homogène, la contrainte verticale totale σ_v qui s'exerce sur un élément unitaire situé à une profondeur Z (figure 1) est égale aux masses totales de (sol et eau) multiplié par la profondeur Z (la contrainte augmente avec la profondeur).

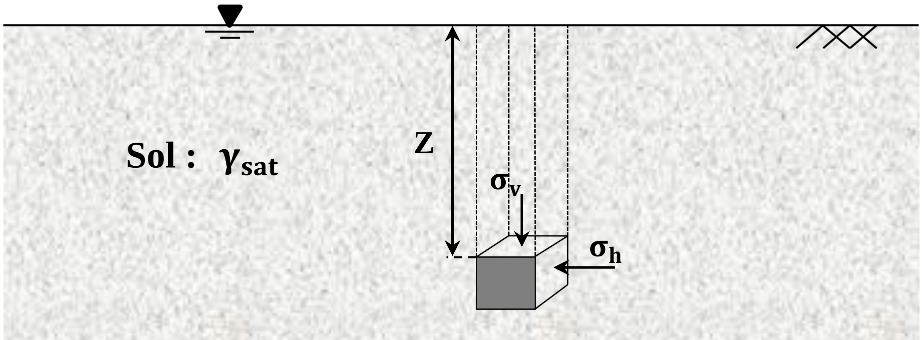


Figure 1 : Les contraintes agissant sur un élément de sol.

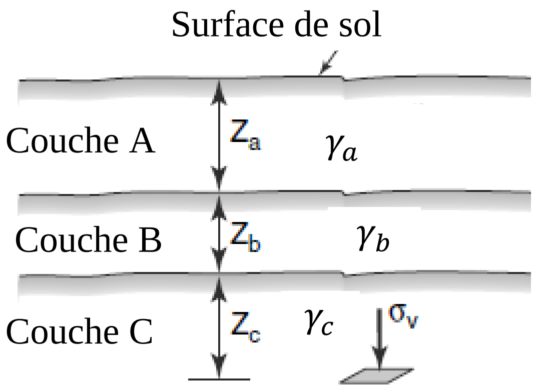
La contrainte verticale est :

$$\sigma_v = \gamma_{sat} Z \tag{1}$$

Lorsqu'on a plusieurs couches :

$$\sigma_v = \sum_{0}^{n} \gamma_i Z_i \tag{2}$$

Avec :
n: nombre de couches
γ_i: poids volumique des couches
Z_i : épaisseur des couches



$$\sigma_v = \gamma_a Z_a + \gamma_b Z_b + \gamma_c Z_c$$

2.2. Contraintes effectives :

L'importance des forces transmises à travers les particules solides a été reconnue pour la première fois par Terzaghi (1920), où il a présenté son principe de contraintes effectives, une relation basée sur des données expérimentales. Ce principe ne s'applique qu'aux sols totalement saturés et met en relation les trois contraintes suivantes :

1) La contrainte normale totale (σ) sur un plan à l'intérieur de la masse du sol, qui est la force par unité de surface transmise dans une direction normale à travers ce plan.
2) la pression d'eau interstitielle (u), qui est la pression de l'eau remplissant l'espace vide entre les particules solides.

3) la contrainte normale effective (σ') sur le plan, représentant la contrainte transmise à travers le squelette du sol uniquement (c'est-à-dire due aux forces intergranulaires).

La figure 2 montre une colonne de masse de sol saturée sans aucune infiltration d'eau. Terzaghi a considéré que la force totale P exercée sur le sol est la somme des forces de contact intergranulaires P’ et de la pression interstitielle u.

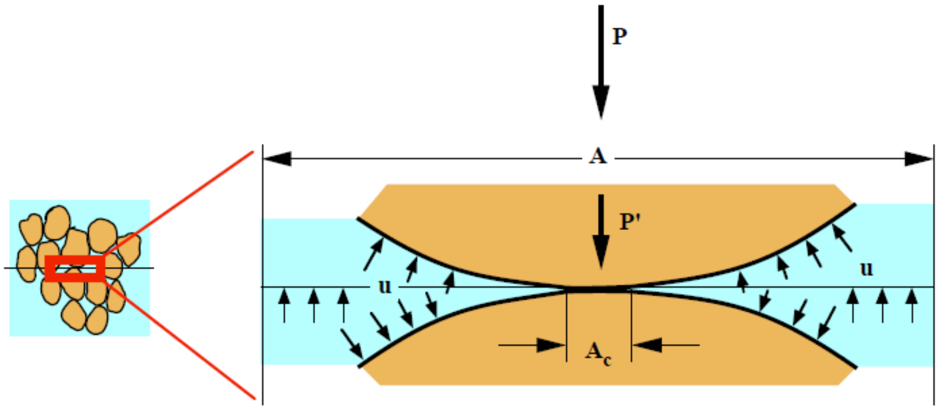


Figure 2 : Forces agissantes aux points de contact des particules de sol

On a :

$$P = P' + (A - A_c).u \quad (3)$$

A : surface totale
Ac : surface de contact entre les grains

On divise l’équation (3) par la surface totale A, on obtient :

$$\frac{P}{A} = \frac{P'}{A} + \left(\frac{A - Ac}{A}\right).u \quad (4)$$

D’où :

$$\sigma = \sigma' + \left(1 - \frac{Ac}{A}\right).u \quad (5)$$

La surface de contact est très faible (d’environ 1% à 3%) de la surface totale, dans ce cas le terme Ac/A tend vers zéro. Pour cela, on a :

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma' + u} \quad (6)$$

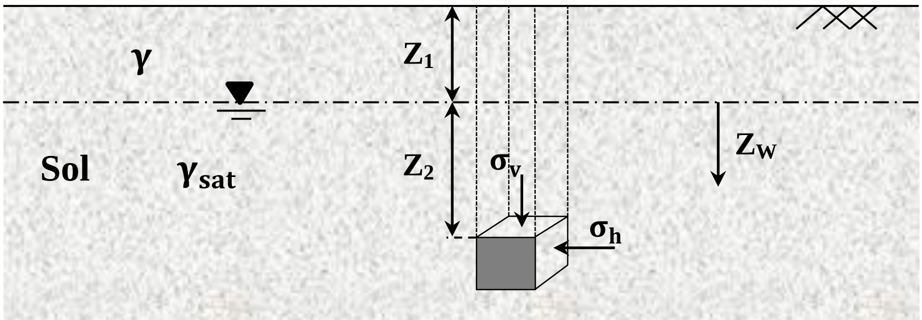
σ : est la contrainte totale.
σ' : est la contrainte effective.

La pression interstitielle se calcule par la formule suivante :

$$\mathbf{u = \gamma_w \, Z_w} \qquad (7)$$

γ_w : poids volumique de l'eau = 10 kN/m^3
Z_w : la profondeur au-dessous de la nappe du point considéré

Exemple :



$$\boldsymbol{\sigma_v = \gamma \, Z_1 + \gamma_{sat} \, Z_2}$$

$$\mathbf{u = \gamma_w \, Z_w}$$

$$\boldsymbol{\sigma'_v = \sigma_v - u = \gamma \, Z_1 + \gamma_{sat} \, Z_2 - \gamma_w \, Z_w} \qquad \mathbf{(Z_2 = Z_w)}$$

$$\boldsymbol{\sigma'_v = \gamma \, Z_1 + (\gamma_{sat} - \gamma_w) Z_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma'_v = \gamma \, Z_1 + \gamma' \, Z_2}$$

$\boldsymbol{\gamma'}$ **:** Poids volumique déjaugé

3. Relation entre contrainte verticale et horizontale :

La relation entre σ_h et σ_v s'exprime en fonction de contraintes effectives ; c'est-à-dire :

$$\sigma'_h = K_0 \, \sigma'_v$$

Avec :

K_0 : coefficient de pression des terres au repos

Le coefficient K_0 peut être calculé par :

$K_0 = 1 - \sin \emptyset$ (sols grenus)

$K_0 = 0{,}44 + 0{,}0042 \text{ IP}$ (sols cohérents)

4. Contraintes dues aux surcharges $\Delta\sigma_z$:

La détermination de la répartition des contraintes dues aux surcharges (maison, immeuble, route…) est essentielle pour vérifier la stabilité (stabilité de la fondation) et la déformation des sols.

4.1. Cas d'une force ponctuelle :

Boussinesq (1885) a donné la solution de la distribution des contraintes causées par l'application d'une charge ponctuelle à la surface d'un milieu homogène, élastique, à l'aide de la théorie mathématique de l'élasticité.

Les hypothèses formulées par Boussinesq dans l'élaboration de sa théorie sont :

- Le milieu du sol est un milieu élastique, homogène, isotrope et semi-infini, qui s'étend à l'infini dans toutes les directions à partir d'une surface plane. (L'homogénéité indique des propriétés identiques en tous points dans des directions identiques, tandis que l'isotropie indique des propriétés élastiques identiques dans toutes les directions en un point).
- Le milieu obéit à la loi de Hooke.
- Le poids propre du sol est ignoré.
- Le changement de volume du sol lors de l'application des charges est négligé.
- Les contraintes sont réparties symétriquement par rapport à l'axe Z.

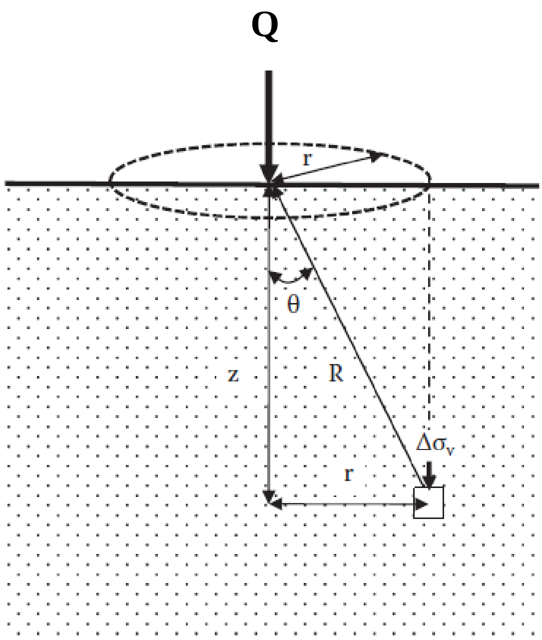


Figure 3 : Contraintes générées par une charge ponctuelle.

Dans la figure 3, l'origine des coordonnées est considérée comme le point d'application de la charge Q ;

Les équations de la contrainte verticale due à la surcharge de Boussinesq sont :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi}\frac{z^3}{R^5} \tag{8}$$

$$= \frac{3Q}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{[(r/z)^2+1]^{5/2}}\right] \tag{9}$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{z^2}\left\{\frac{3}{2\pi}\frac{1}{[(r/z)^2+1]^{5/2}}\right\} = \frac{Q}{z^2}\ \mathrm{I} \tag{10}$$

Avec I : facteur d'influence

Pour plusieurs valeurs supposées de r, on peut calculer r/z et la valeur de I peut être par la suite trouvée, la valeur de $\Delta\sigma_z$ dans ce cas est alors calculée.

Pour r = 0, $\Delta\sigma_z$ est le maximum d'une valeur de 0,4775 Q/Z^2 ; pour r = 2Z, il n'est que d'environ 1,8% du maximum, et pour r = 3Z, il n'est que de 0,3% du maximum. La répartition de la contrainte est présentée à la figure 4.

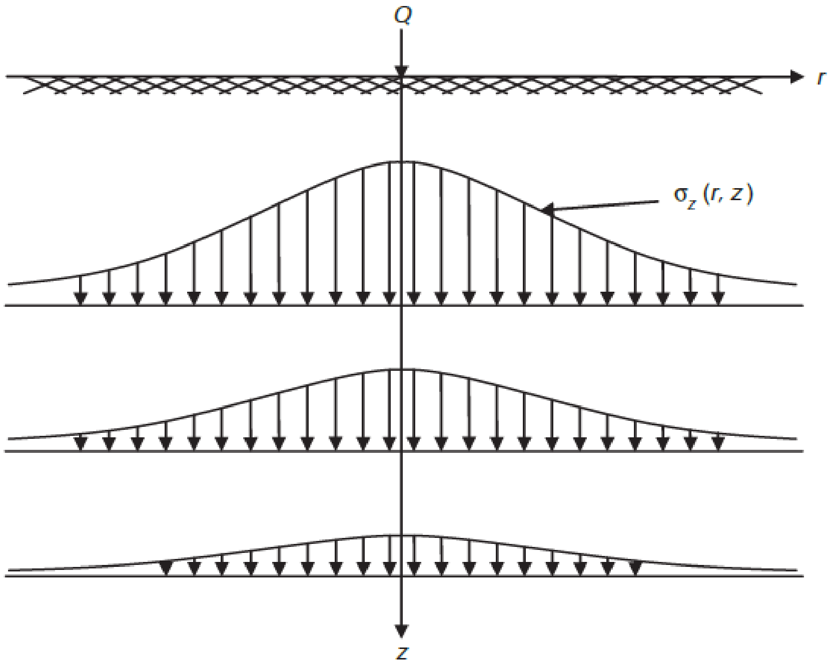


Figure 4 : Distribution des contraintes verticales sur un plan horizontal à la profondeur z.

4.2. Charges linéaires :

Considérons sur la figure 5 une charge uniformément répartie appliquée le long d'une ligne droite, d'intensité q d'une extension infinie, agit sur la surface d'un milieu élastique. Une telle charge produit un état de déformation plane ; c'est-à-dire que les déformations et les contraintes dans tous les plans perpendiculaires à la ligne de la charge sont identiques.

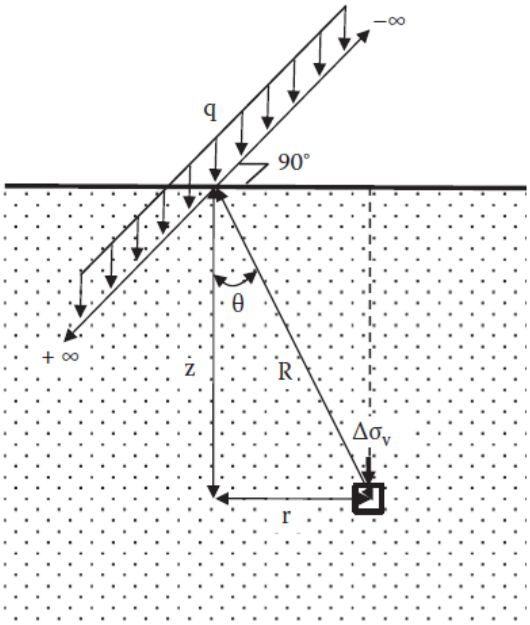


Figure 5 : Charge linéaire agissante sur une surface de sol.

La contrainte verticale $\Delta\sigma_v$ due à une charge de longueur infinie peut être obtenue en intégrant l'équation 9 dans les limites - ∞ et + ∞.

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi(r^2 + z^2)^2} = \frac{2q}{\pi z} \cdot \frac{1}{[1 + (r/z)^2]^2} \qquad (11)$$

L'équation 11 peut être écrite sous une autre forme :

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{z} . \mathrm{I} \qquad (12)$$

Avec

$$\mathrm{I} = \frac{2/\pi}{[1 + (r/z)^2]^2} \qquad (13)$$

4.3. Charge uniformément rectangulaire d'une bande infinie :

Soit une charge uniforme d'intensité q par unité de surface agissante sur une bande de longueur infinie et une largeur constante B (= 2b) comme indiqué sur la figure 6.

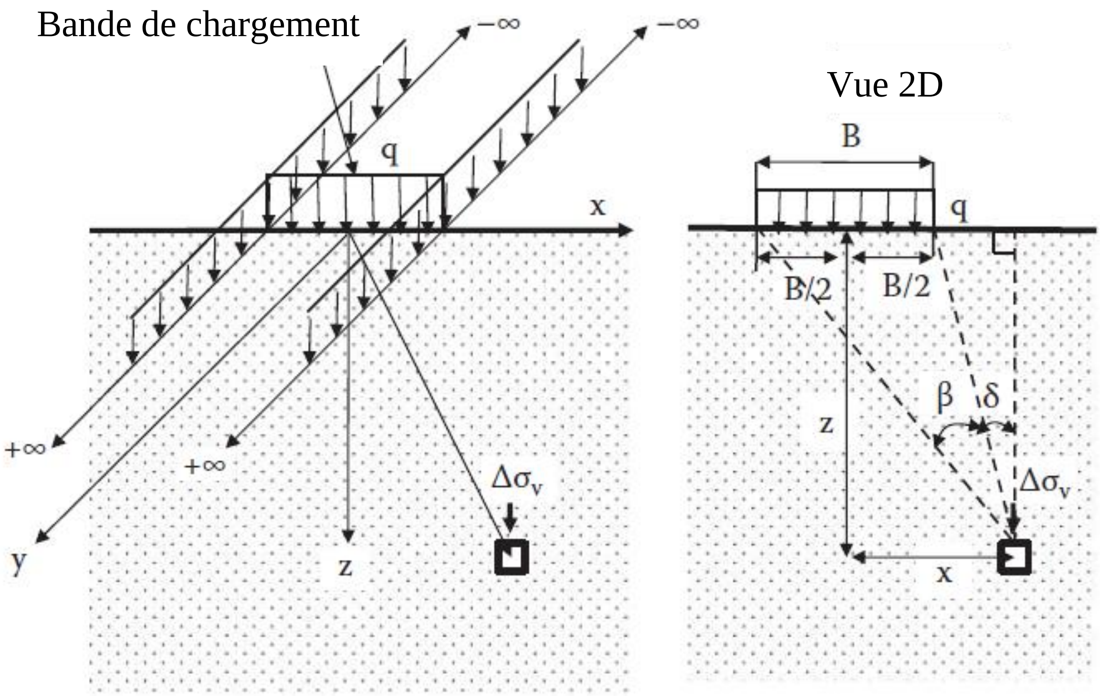


Figure 6: Charge d'une bande de longueur infinie agissante sur une surface d'un milieu élastique semi-infini

La contrainte verticale $\Delta\sigma_z$ au point A est :

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}[\beta + \cos(\beta + 2\delta) . \sin\beta] \qquad (14)$$

4.4. Charge uniformément rectangulaire d'une bande finie :

La forme la plus courante d'une zone chargée dans la pratique de l'ingénierie des fondations est un rectangle, surtout dans le cas des bâtiments. En appliquant le principe d'intégration, on peut obtenir la contrainte verticale en un point situé à une certaine profondeur sous le centre ou un coin d'une zone rectangulaire uniformément chargée, en se basant soit sur la solution de Boussinesq, soit sur celle de Westergaard pour une charge ponctuelle.

4.4.A. Solution de Boussinesq :

La solution de Boussinesq peut également être utilisée pour calculer l'augmentation de la contrainte verticale sous une zone de charge rectangulaire, comme le montre la figure 7. La zone chargée est située au niveau de la surface du sol, a une longueur L et une largeur B. La charge uniformément répartie par unité de surface est égal à q.

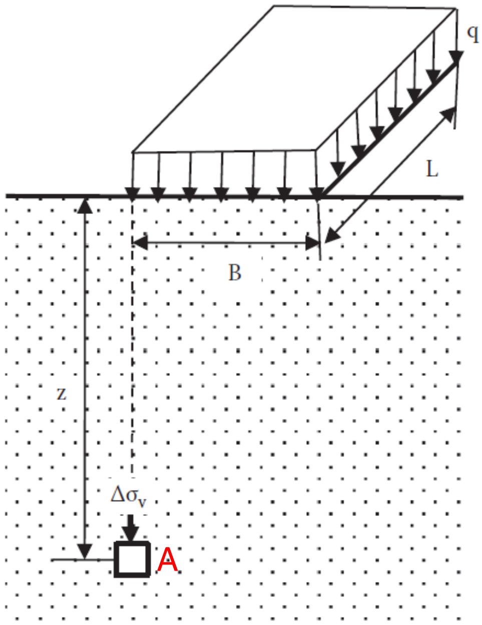


Figure 7 : Contrainte verticale au coin d'une zone rectangulaire chargée uniformément

L'augmentation de la contrainte verticale ($\Delta\sigma_z$) au point A, qui est situé à la profondeur z sous le coin de la zone rectangulaire peut être calculée par la formule suivante :

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\left(\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right] \quad (15)$$

Avec : m=B/z et n= L/z

Le deuxième terme entre parenthèses est un angle en radians. Il est intéressant de noter que l'expression ci-dessus ne contient pas la dimension z ; ainsi, pour toute grandeur de z, la contrainte dépend uniquement des rapports m et n et de l'intensité de la charge de surface.

L'équation 15 peut être écrite sous la forme suivante :

$$\Delta\sigma_z = q \, . \, I \tag{16}$$

Avec :

$$I = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1} \, . \, \left(\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

I : facteur d'influence

Sur la base de cette équation, Fadum (1941) a préparé un schéma pour calculer les valeurs d'influence pour des ensembles de valeurs de m et n, comme le montre la figure 8.

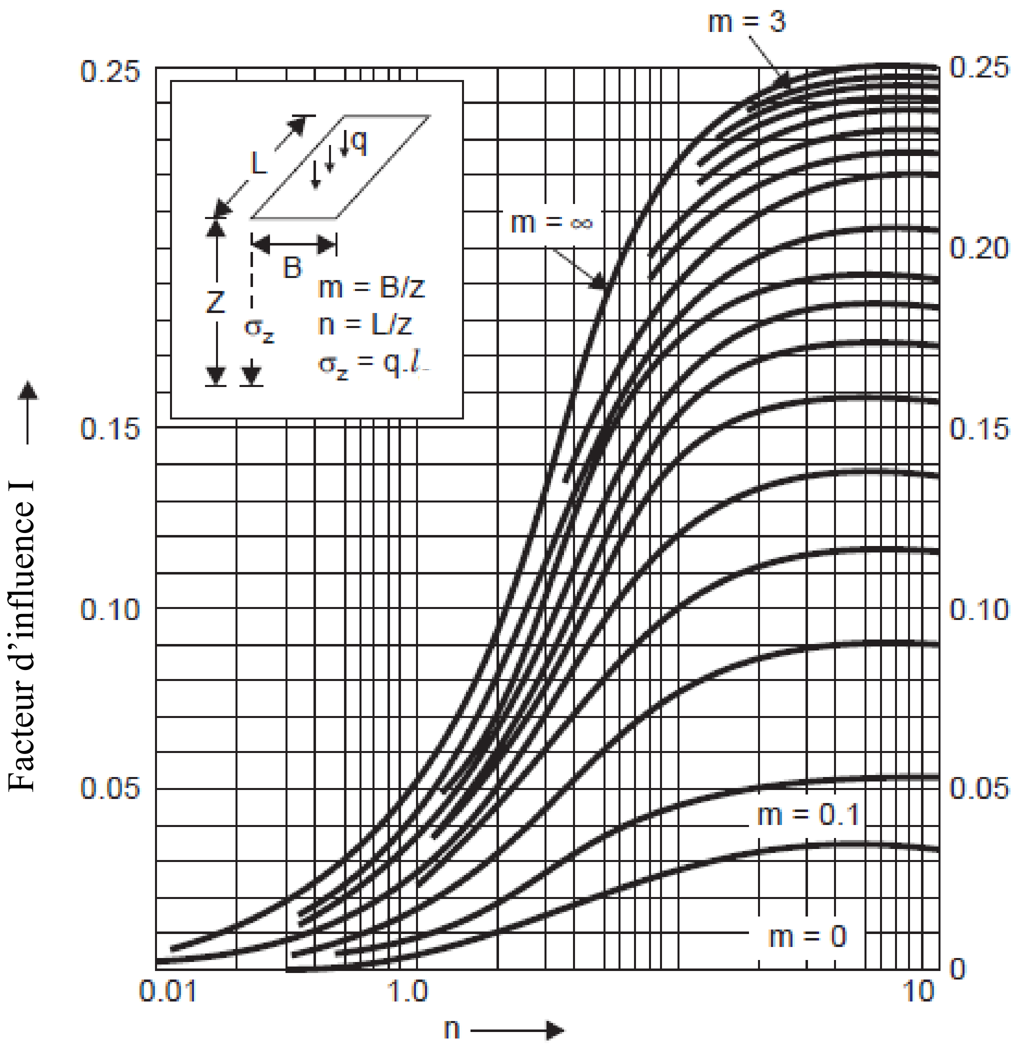


Figure 8: Facteurs d'influence pour la contrainte verticale sous un coin d'une zone rectangulaire uniformément chargée (Fadum, 1941).

L'augmentation de la contrainte verticale en un point situé à l'intérieure de la zone rectangulaire uniformément chargée peut être trouvée en utilisant le principe de superposition, en divisant le rectangle en quatre parties. Le point A' est le coin commun aux quatre rectangles. L'augmentation totale de la contrainte causée par l'ensemble de la zone chargée peut être donnée par :

$$\Delta\sigma_z = q\,.(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \tag{17}$$

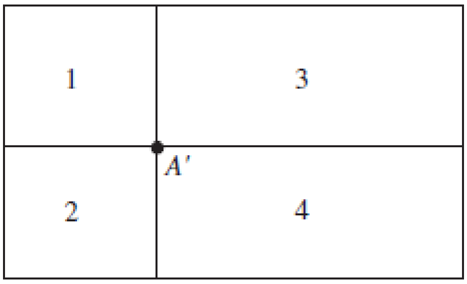
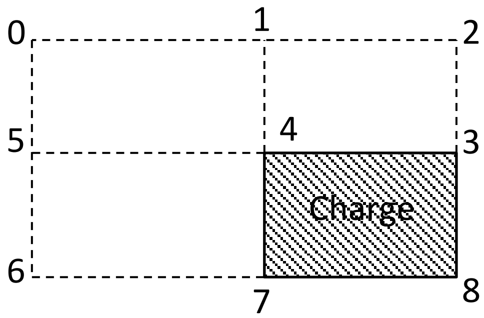


Figure 9: Contrainte à l'intérieur d'un rectangle uniformément chargé.

Si la contrainte à calculer se trouve à l'extérieur de rectangle au point 0:



$$\Delta\sigma_z = q\,.\; I$$

$$I = I_{0286} - I_{0235} - I_{0176} + I_{0145}$$

4.4.B. Solution de Westergaard :

Westergaard a pris pour hypothèse que le sol est constitué de très fines feuilles horizontales d'une rigidité infinie, qui empêchent l'apparition de toute contrainte latérale, et l'augmentation de la contrainte verticale en un point situé sous un coin d'une zone rectangulaire uniformément chargée, peut être obtenir par intégration de la contrainte due à une charge ponctuelle dans des conditions similaires :

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-2\nu}{2-2\nu}\right)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1-2\nu}{2-2\nu}\right)^2\cdot\ \frac{1}{m^2n^2}}\right] \tag{18}$$

Avec :
ν : coefficient de poisson
m=L/z et n= B/z

4.5. Charge uniforme sur une surface irrégulière :

Newmark (1942) a mis au point une procédure graphique simple pour calculer la contrainte verticale à l'intérieur d'un sol, chargé par une charge verticale uniformément répartie à la surface. L'abaque qu'il a conçu à cet effet est appelé "abaque d'influence". Elle est applicable à une masse de sol homogène, isotrope et élastique (et non à un sol stratifié).

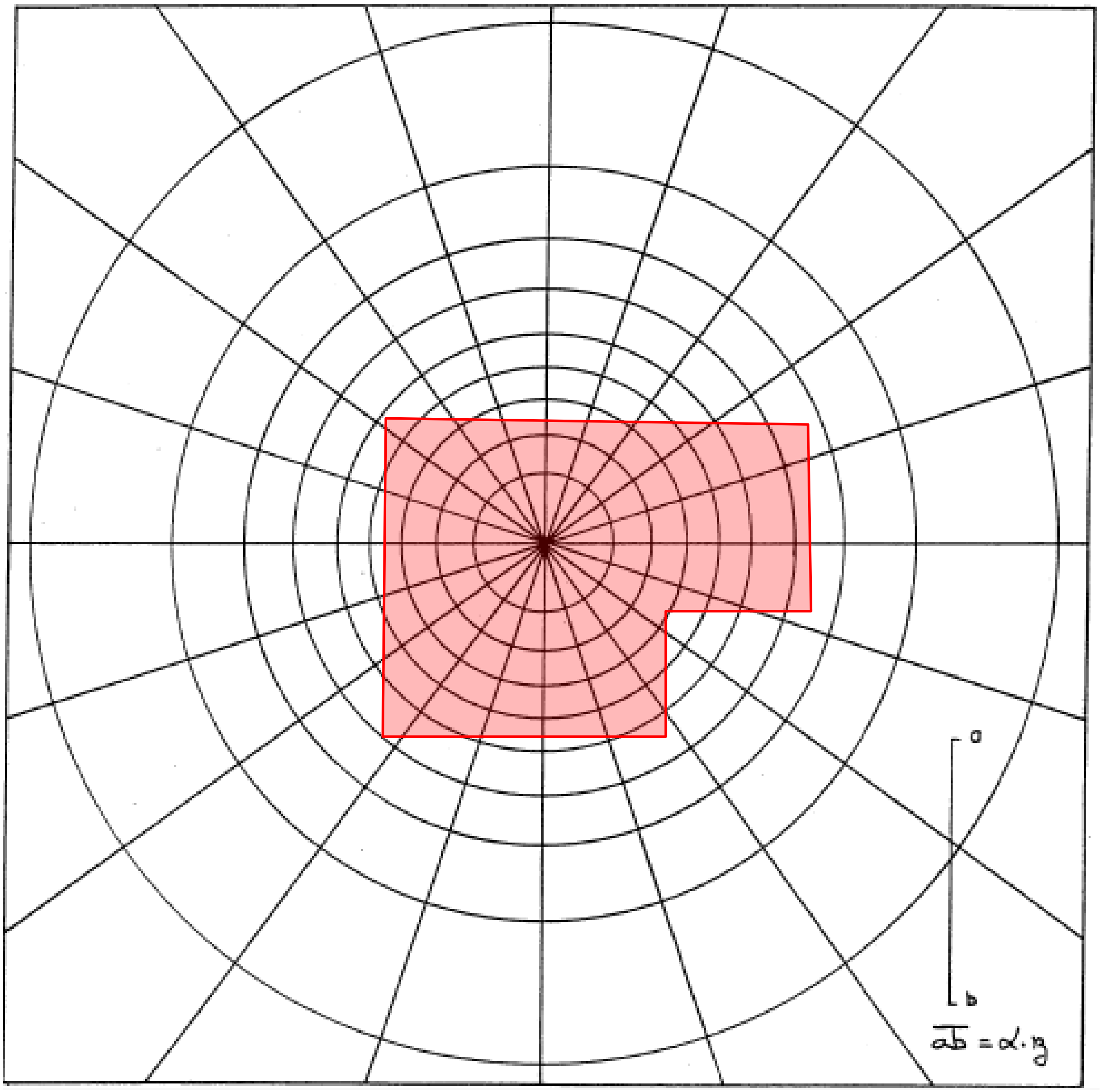


Figure 10 : L'abaque de Newmark pour les surfaces irrégulières

Les étapes à suivre pour cette méthode sont :

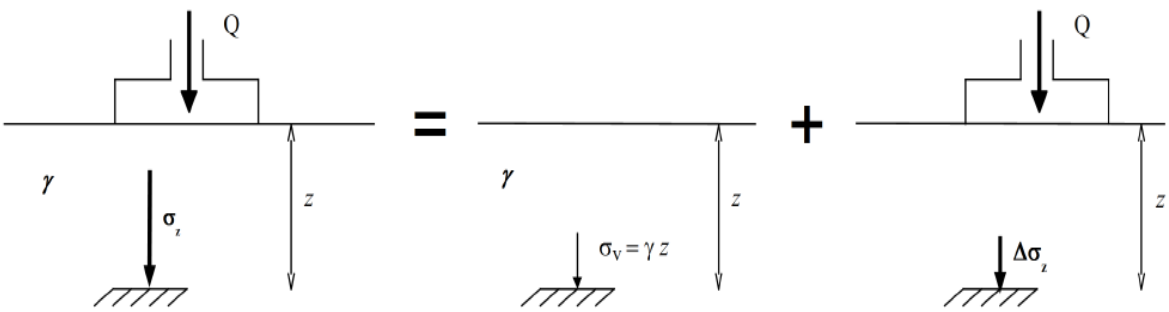
1. Le point où l'on veut calculer la contrainte due à la surcharge est placé au centre de l'abaque.

2. La surface ou la fondation est dessinée à une échelle X telle que **X=Z/ab** (**Z** : la profondeur désirée en m. **ab** : est la distance représentée sur l'abaque en cm)
3. Dessiner la surface
4. Compter le nombre de carreaux **n** recouverts par la surface
5. Calculer $\Delta\sigma$

$$\Delta\sigma_z = 0{,}005 \text{ n q} \tag{19}$$

n : le nombre de carreaux occupé par la surface

Donc la contrainte σ_z s'exerçant à la profondeur z sur une facette horizontale est égale à la somme de la contrainte naturelle σ_v due au poids du sol, et de la contrainte due aux surcharges $\Delta\sigma_z$



$$\sigma_z = \sigma_v + \Delta\sigma_z$$