

Chapitre 2

Bifurcations locales de codimension 1

Généralement le terme bifurcation est associé à la notion de changement du type topologique du portrait de phases d'un champ de vecteurs qui dépend différentiablement d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.1)$$

lorsque le paramètre μ varie autour d'une certaine valeur μ^* .

Le plus petite dimension k de l'espace des paramètres permettant d'avoir ce changement topologique est appelé codimension de la bifurcation.

2.1 Stabilité structurelle

La notion de stabilité structurelle locale (c'est-à-dire au voisinage d'un équilibre) est opposé à la notion de bifurcation locale.

Définition 2.1.1. *Deux systèmes dynamiques $\dot{x} = f(x)$ et $\dot{y} = g(y)$ tel que f est définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et g sur un ouvert V de \mathbb{R}^n sont dit topologiquement équivalent s'il existe un homéomorphisme h de U vers V qui applique les trajectoires du premier système sur celles du deuxième système et qui préserve la direction du temps.*

Si φ et ψ sont les flots des deux systèmes alors on a $y = h(x)$ et :

$$\psi(t, h(x)) = \psi(t, y) = h \circ \varphi(t, x).$$

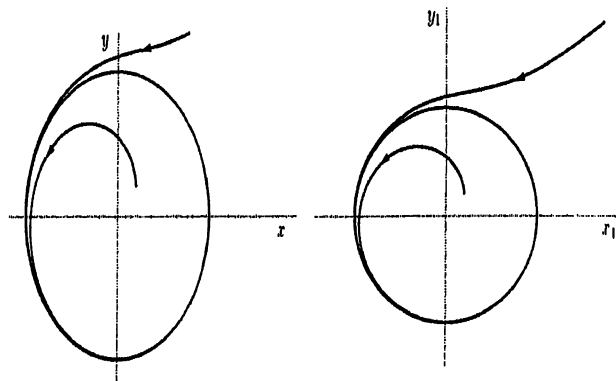


FIGURE 2.1 – Équivalence Topologique

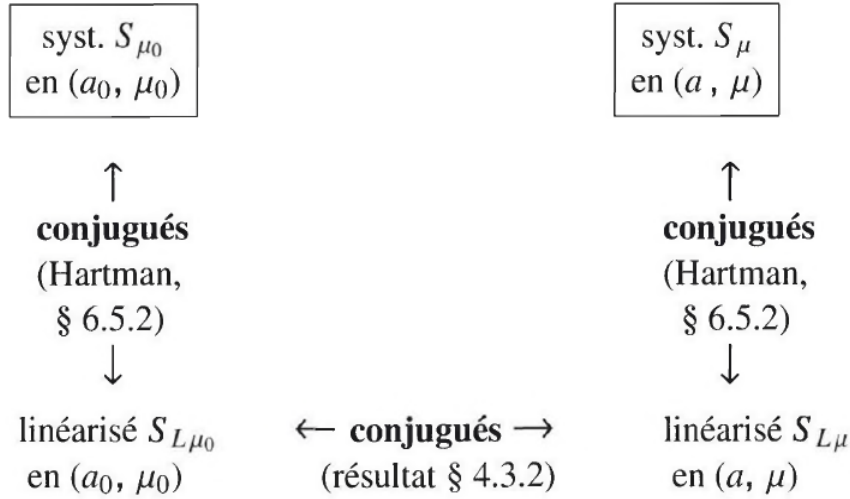


FIGURE 2.2 – Stabilité structurelle des systèmes non-linéaires au voisinage des points hyperboliques

Définition 2.1.2. Soit $(x_e, \mu^*) \in U \times \mathbb{R}^k$ avec $f(x_e, \mu^*) = 0$. On dit que le système (2.1) est localement structurellement stable en (x_e, μ^*) s'il existe un voisinage $V_{x_e} \times W_{\mu^*}$ de (x_e, μ^*) et une application continue

$$E : \mu \in W_{\mu^*} \mapsto E(\mu),$$

telle que pour tout $\mu \in W_{\mu^*}$ on a :

* $f(E(\mu), \mu) = 0$, avec $E(\mu^*) = x_e$;

* Sur le voisinage $V_{x_e} \times W_{\mu^*}$ les deux systèmes décrit par $\dot{x} = f(x, \mu)$ et $\dot{y} = f(y, \mu^*)$ soient topologiquement conjugués (topologiquement équivalents).

Si le système n'est pas localement structurellement stable en (x_e, μ^*) , on dit que μ^* est une valeur de bifurcation locale de l'équilibre x_e .

Théorème 2.1.1. (Stabilité structurelle locale) Soient f une fonction de classe C^1 et x_e un équilibre hyperbolique du système (2.1). Alors, il existe :

* Un voisinage W_{μ^*} de μ^* ;

* Une fonction $E : \mu \in W_{\mu^*} \mapsto E(\mu)$, de classe C^1 de W dans \mathbb{R}^n telle que $f(E(\mu), \mu) = 0$, avec $E(\mu^*) = x_e$,

tels que pour tout μ appartenant au voisinage W_{μ^*} , tous les systèmes non-linéaires $\dot{x} = f(x, \mu)$ sont conjugués entre eux au voisinage, pour chacun, de son équilibre $E(\mu)$.

Corollaire 2.1.1. Il ne peut y avoir bifurcation locale qu'au voisinage d'un équilibre non-hyperbolique.

Exemple 2.1.1. Tout système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

avec A une matrice à valeurs propres ayant les parties réelles non-nulles, est structurellement stable sur \mathbb{R}^n .

D'abord on va considérer les bifurcations d'un système de la forme générale (2.1), ensuite on va traiter des systèmes génériques.

Théorème 2.1.2. (*Sotomayor*)

Considérons le système (2.1), et soit $(x_e, \mu^*) \in U \times \mathbb{R}$ avec $f(x_e, \mu^*) = 0$.

On suppose que la matrice $A = D_x f(x_e, \mu^*)$ admet comme valeur propre simple $\lambda = 0$ de vecteur propre v . On désigne par w un vecteur propre de la transposée A^t pour la même valeur propre $\lambda = 0$. Supposons de plus que A admet k valeurs propres de partie réelle négative et $n - k - 1$ valeurs propres de partie réelle positive. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$w^t D_\mu f(x_e, \mu^*) \neq 0, \quad (2.2)$$

$$w^t D_x^2 f(x_e, \mu^*)(v, v) \neq 0. \quad (2.3)$$

Alors, il existe une courbe différentiable de points fixes du système (2.1) dans $R^n \times R$ qui passe par (x_e, μ^*) et qui est tangente à l'hyperplan $R^n \times \{\mu^*\}$. Au voisinage de x_e , il n'y a aucun point singulier si $\mu < \mu^*$ et il y a deux points singuliers si $\mu > \mu^*$. Les deux points singuliers sont hyperboliques et possèdent des variétés stables de dimension k et $k + 1$ respectivement. L'ensemble des champs de vecteurs différentiables qui satisfont la condition ci-dessus est un ouvert dense de l'espace de Banach des champs de vecteurs différentiables qui ont le point x_e comme point singulier avec une valeur propre nulle simple.

La bifurcation décrite dans ce théorème est appelée bifurcation 'pli'.

Lorsque les conditions

$$w^t D_\mu f(x_e, \mu^*) = 0, \quad (2.4)$$

$$w^t D_x D_\mu f(x_e, \mu^*)v \neq 0, \quad (2.5)$$

$$w^t D_x^2 f(x_e, \mu^*)(v, v) \neq 0. \quad (2.6)$$

Sont satisfait, la bifurcation s'appelle bifurcation transcritique.

Si les conditions sont modifiées comme suit

$$w^t D_\mu f(x_e, \mu^*) = 0, \quad (2.7)$$

$$w^t D_x D_\mu f(x_e, \mu^*)v \neq 0, \quad (2.8)$$

$$w^t D_x^2 f(x_e, \mu^*)(v, v) \neq 0, \quad (2.9)$$

$$w^t D_x^3 f(x_e, \mu^*)(v, v, v) \neq 0. \quad (2.10)$$

Alors la bifurcation s'appelle bifurcation fourche.

Dans la section suivante on va expliciter ces bifurcations dans le cas de la dimension un.

2.2 Quelques bifurcations en dimension 1

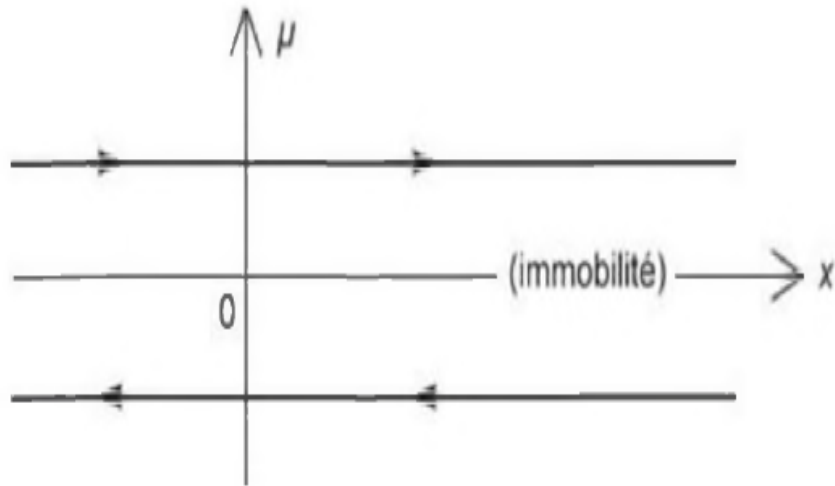
Considérons le système (2.1) avec $x \in \mathbb{R}$. En dimension 1 un équilibre non-hyperbolique (x_e, μ^*) est caractérisé par $\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, \mu^*) = 0$.

Le développement de Taylor de $f(x, \mu)$ au voisinage de $(x_e, \mu^*) = (0, 0)$ s'écrit

$$f(x, \mu) = a_{00} + a_{10}\mu + a_{01}x + a_{20}\mu^2 + a_{11}x\mu + a_{02}x^2 + \dots$$

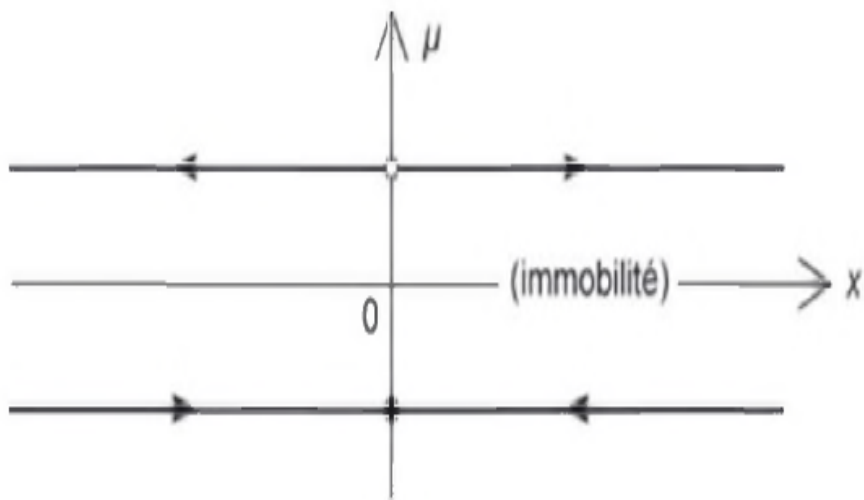
On a $a_{00} = a_{01} = 0$. Les divers possibilités de bifurcation dépendent des valeurs des coefficients $a_{i,j}$.

La plus simple bifurcation qu'on peut rencontrer correspond à $a_{10} = 1$, tous les autres coefficients sont nuls : on a donc $\dot{x} = \mu$. Pour $\mu = 0$ il y a équilibre stable (immobilité de tous les

FIGURE 2.3 – Diagramme de bifurcation du système $\dot{x} = \mu$.

états). Pour $\mu \neq 0$ aucun équilibre. Le diagramme de bifurcation (tracé du portrait de phases en fonction de μ), est le suivant :

Une autre possibilité de bifurcation simple est obtenue avec $a_{11} = 1$, tous autres coefficients étant nuls, donc $\dot{x} = \mu x$. l'équilibre 0 est simplement stable pour $\mu = 0$, instable pour $\mu < 0$, et asymptotiquement stable pour $\mu < 0$. Le diagramme de bifurcation est le suivant Nous

FIGURE 2.4 – Diagramme de bifurcation du système $\dot{x} = \mu x$.

nous intéressons maintenant aux bifurcations non-triviales les plus courantes correspondent aux polynômes de Taylor de faible degré en (x, μ) .

2.2.1 Bifurcations Col-nœud (saddle-node)

La bifurcation nœud-col correspond à $a_{10} = 1$ et $a_{02} = -1$ tous les autres a_{ij} étant nuls. On a alors l'équation différentielle :

$$\dot{x} = \mu - x^2 = f(x, \mu) \quad (2.11)$$

Où μ est un paramètre réel.

Trois cas peuvent être distingués selon les valeurs de μ .

1. Si $\mu < 0$: il n'y a pas d'équilibre et \dot{x} est toujours négative.
2. Si $\mu = 0$: l'origine est le seul point d'équilibre avec :

$$\dot{x} = -x^2 < 0, \forall x$$

3. Si $\mu > 0$: il existe deux équilibres : $x_{e+} = \sqrt{\mu}$ et $x_{e-} = -\sqrt{\mu}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_{e+}) &= -2\sqrt{\mu} < 0 \text{ donc } x_{e+} \text{ est stable.} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{e-}) &= 2\sqrt{\mu} > 0 \text{ donc } x_{e-} \text{ est instable.} \end{aligned}$$

Le diagramme de bifurcation associé est illustré dans la figure (2.1).

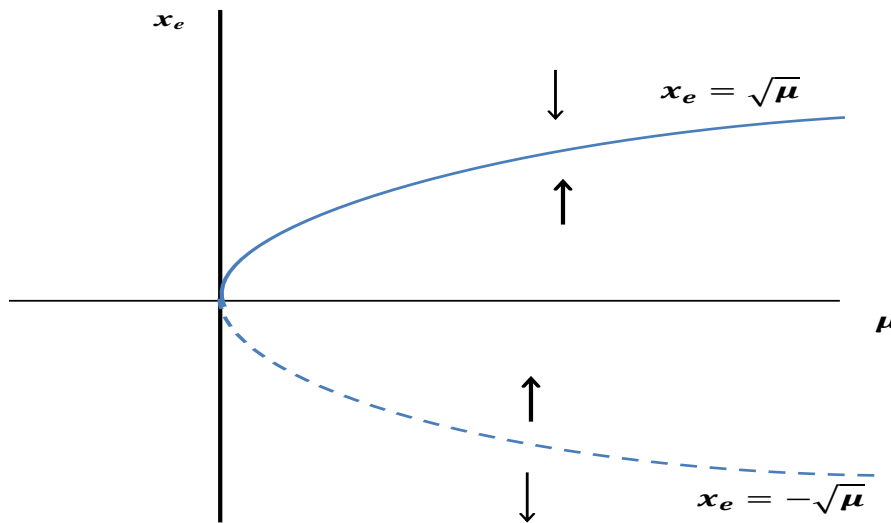


FIGURE 2.5 – Diagramme de la bifurcation Col-nœud.

2.2.2 Bifurcation fourche (Pitchfork)

Cette bifurcation correspond à $a_{11} = 1$ et $a_{03} = -1$ tous les autres a_{ij} étant nuls. On a alors l'équation différentielle :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2) = f(x, \mu).$$

Où μ est un paramètre réel.

Trois cas sont possibles :

1. $\mu < 0$: l'origine est l'unique point d'équilibre qui est stable.
2. $\mu = 0$: l'origine est l'unique point d'équilibre et est stable.

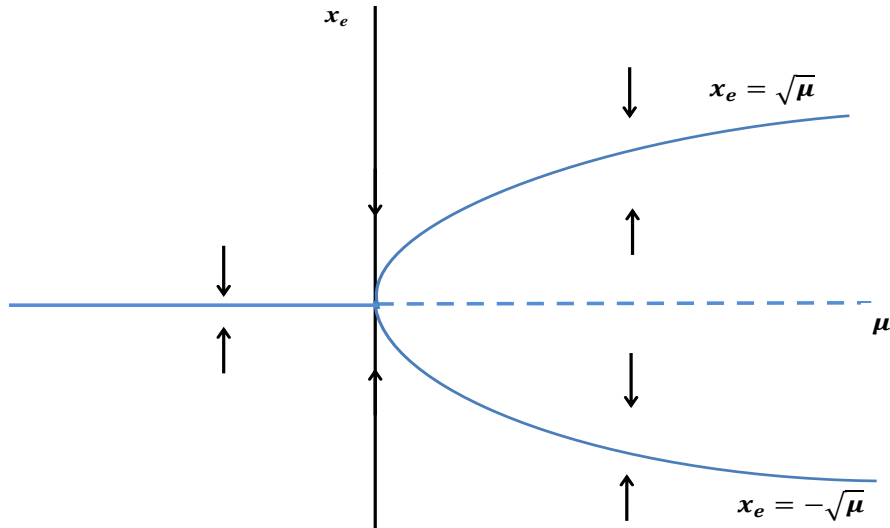


FIGURE 2.6 – Diagramme de la bifurcation fourche super-critique.

3. $\mu > 0$: on a trois points d'équilibres, l'origine qu'est instable et deux autres points d'équilibres $x_{e+} = \sqrt{\mu}$ et $x_{e-} = -\sqrt{\mu}$ qui sont stables.

Le diagramme de bifurcation associé est illustré dans la figure (2.6). Lorsque $a_{11} = 1$ et $a_{03} = 1$ tous les autres a_{ij} étant nuls. On aura alors l'équation différentielle :

$$\dot{x} = \mu x + x^3 = x(\mu + x^2) = f(x, \mu).$$

La bifurcation qui correspond à cette équation est appelé bifurcation fourche sous-critique. Tracer le diagramme de bifurcation associé.

2.2.3 Bifurcation transcritique (échange de stabilité)

Cette bifurcation correspond à $a_{11} = 1$ et $a_{02} = 1$ tous les autres a_{ij} étant nuls. On a alors l'équation différentielle :

$$\dot{x} = \mu x + x^2.$$

μ est un paramètre réel, on a toujours deux équilibres 0 et $x^* = -\mu$.

On a trois cas :

1. $\mu < 0$ alors 0 est stable mais $x^* = -\mu$ est instable.
2. $\mu = 0$ les deux points sont confondus en un seul point qui est semi stable.
3. $\mu > 0$ alors 0 est instable mais x^* est stable.

Le diagramme de bifurcation associé est illustré dans la figure (2.7).

2.3 Bifurcation en dimension supérieure à 1

Considérons le système (2.1), et soit $(x_e, \mu^*) \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $n > 1$ et $f(x_e, \mu^*) = 0$. Le cas où la matrice $A = D_x f(x_e, \mu^*)$ admet exactement une valeur propre nulle (et aucune autre valeur propre avec partie réelle nulle) est le cas le plus simple à étudier puisque le comportement du système (2.1) pour μ proche de la valeur de bifurcation μ^* est complètement déterminé par le comportement du système unidimensionnel

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

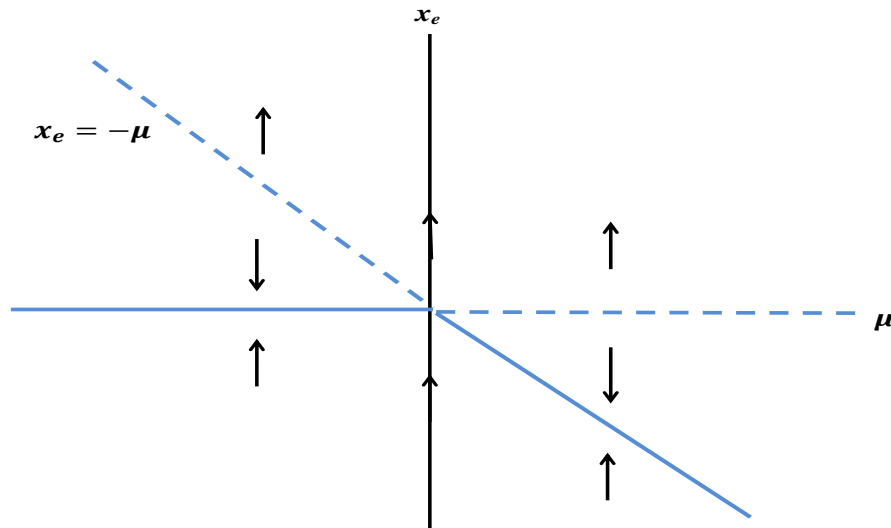


FIGURE 2.7 – Diagramme de la bifurcation transcritique.

dans la variété centrale, et les bifurcations correspondants à la scission, naissance, fusion ou changement de stabilité d'équilibres, ce qui a été déjà présenté dans la section précédente.

Dans cette section on s'intéresse au cas où la matrice A admet une paire de valeurs propres purement imaginaires et aucune autre valeur propre à partie réelle nulle. Dans ce cas, le théorème des fonctions implicites garantit que pour chaque μ proche de μ^* il y aura un point d'équilibre unique $x_e(\mu)$ proche de x_e ; cependant, si les valeurs propres de $D_x f(x_e(\mu), \mu)$ traversent l'axe imaginaire à $\mu = \mu^*$, alors les dimensions des variétés stables et instables de $x_e(\mu)$ changeront et le portrait de phase locale de (2.1) changera à $\mu = \mu^*$, on parle alors de la bifurcation la plus classique, qui est la bifurcation de Hopf. Il s'agit là de la disparition d'un point d'équilibre au profit d'un équilibre de nature différente qui est un cycle-limite, ce qui ne peut pas se produire en dimension 1.

Nous illustrons cette idée par un exemple simple pour un système planaire et nous présentons ensuite une théorie générale. Considérons le système planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Pour toute valeur de μ ce système admet l'origine $(0, 0)$ comme unique équilibre. La matrice jacobienne est la suivante

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

qui possède une paire de valeurs propres complexes conjugués $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$. L'origine est un foyer stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. En coordonnées polaires le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

alors pour $\mu = 0$ on a $\dot{r} = -r^3 < 0$ d'où l'origine est un foyer stable, et pour $\mu > 0$ il ya un cycle limite stable

$$\gamma_{\mu}(t) = \sqrt{\mu}(\cos(t), \sin(t))^T$$

La bifurcation du cycle limite à partir de l'origine qui se produit à la valeur de bifurcation $\mu = 0$ lorsque l'origine change de stabilité est appelée bifurcation de Hopf. Le diagramme de bifurcation est illustré dans la figure (2.8).

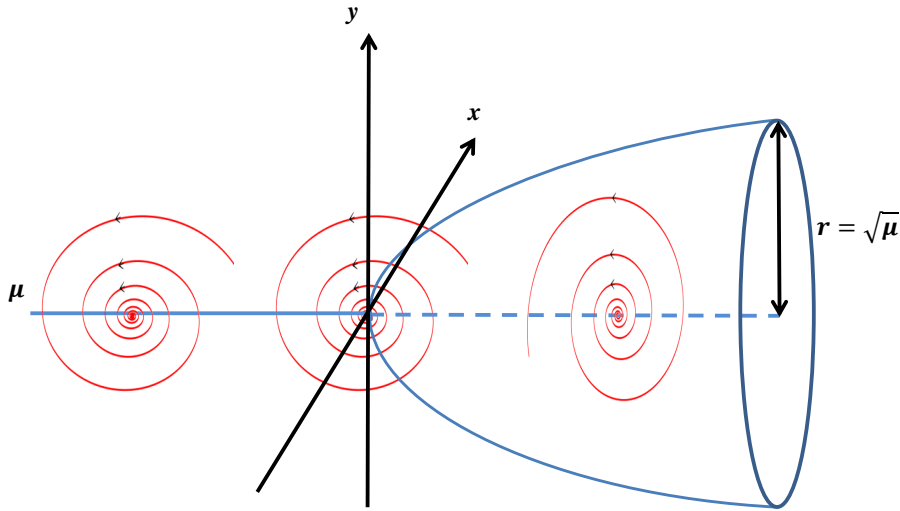


FIGURE 2.8 – Diagramme de la bifurcation de Hopf super-critique.

2.3.1 Théorème de bifurcation de Hopf super-critique

Considérons maintenant le système analytique planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + p(x, y, \mu), \\ \dot{y} = x + \mu y + q(x, y, \mu), \end{cases} \quad (2.12)$$

où μ est un paramètre réel, avec les fonctions analytiques p et q sont développées comme suit

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j, \quad (2.13)$$

$$q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j, \quad (2.14)$$

Pour $\mu = 0$ la matrice jacobienne à l'origine $A(0, 0)$ admet une paire de valeurs propres imaginaires pures. Le nombre de Lyapunov σ est donné par

$$\sigma = \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})].$$

Si $\sigma \neq 0$ alors l'origine est un foyer faible de multiplicité 1, il est stable si $\sigma < 0$ et instable si $\sigma > 0$.

Théorème 2.3.1. *Pour un système analytique planaire (2.12) si $\sigma \neq 0$, alors une bifurcation de Hopf se produit à l'origine, lorsque $\mu = 0$. En particulier, si $\sigma < 0$, alors un unique cycle limite stable bifurque de l'origine de (2.12) lorsque μ augmente de zéro (la bifurcation de Hopf est appelée super-critique) et si $\sigma > 0$, alors un unique cycle limite instable bifurque de l'origine de (2.12) lorsque μ diminue au delà de zéro (la bifurcation de Hopf est appelée sous-critique).*

Dans le cas général d'un système analytique planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + p(x, y), \\ \dot{y} = cx + dy + q(x, y), \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $\Delta = ad - bc > 0$, $a + d = 0$ et $p(x, y)$, $q(x, y)$ donnés par (2.13-2.14), la matrice jacobienne à l'origine

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

admet une paire de valeurs propres imaginaires pures et l'origine est un foyer faible. Le nombre de Lyapunov est donné dans ce cas par

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{-3\pi}{2b\Delta^{3/2}} \left[[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \right. \\ & + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ & \left. - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20}) \right] \\ & - (a^2 + bc) [3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \end{aligned}$$

Alors le théorème précédant reste valable pour le système (2.15) en posant $\mu = a + d$.

Dans le cas où le système (2.1) est de dimension supérieur à deux le théorème suivant qui a été démontré par E. Hopf en 1942, établit l'existence de la bifurcation de Hopf lorsque la matrice jacobienne $Df(x_e(\mu), \mu)$ admet une paire de valeurs propres imaginaires pures à $\mu = \mu^*$, et aucune autre valeur propre avec partie réelle nulle.

Théorème 2.3.2. *Supposons que le système (2.1) avec f de classe C^4 , $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}$ ait un point critique x_e pour $\mu = \mu^*$ et que $Df(x_e, \mu^*)$ admet une paire simple de valeurs propres imaginaires pures et aucune autre valeur propre avec partie réelle nulle. Alors il y a une courbe lisse des points d'équilibre $x(\mu)$ avec $x_e(\mu^*) = x_e$ et les valeurs propres, $\lambda(\mu)$ et $\bar{\lambda}(\mu)$ de $Df(x_e(\mu), \mu)$, qui sont des imaginaires purs à $\mu = \mu^*$ sont des fonctions différentiables de μ . De plus, si*

$$\frac{d}{d\mu} \Re(\lambda(\mu^*)) \neq 0,$$

alors il y a une variété centrale de dimension deux unique passant par (x_e, μ^*) et une transformation lisse de coordonnées tel que le système (2.1) est transformé dans la variété centrale à la forme normale suivante

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) - by(x^2 + y^2) + O(|X^4|) \\ \dot{y} &= x + bx(x^2 + y^2) + ay(x^2 + y^2) + O(|X^4|) \end{cases}$$

dans un voisinage de l'origine qui a pour $a \neq 0$ un foyer de multiplicité 1 à l'origine et

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y + ax(x^2 + y^2) - by(x^2 + y^2) + O(|X^4|) \\ \dot{y} &= x + \mu y + bx(x^2 + y^2) + ay(x^2 + y^2) + O(|X^4|) \end{cases}$$

est un déploiement universel de cette forme normale dans un voisinage de l'origine sur la variété centrale.

Exemple 2.3.1. *Considérons le système planaire quadratique suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y + x^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y + x^2 \end{cases}$$

qui admet un foyer faible de multiplicité 1 à l'origine pour $\mu = 0$ car le nombre de Lyapunov est $\sigma = -3\pi \neq 0$. De plus comme $\sigma = -3 < 0$ alors le système admet une bifurcation de Hopf super-critique à $\mu = 0$.