# Table des matières

# Chapitre 1

# Séries numériques

## 1.1 Séries à termes réels ou complexes

**Définition 1.1.1.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série numérique (respectivement complexe) de terme général $u_n$, toute expression de la forme :*

$$u_0 + u_1 + ... + u_n + ... = \sum_{n\geq 0} u_n, \tag{1.1}$$

*où les nombres réels ( respectivement complexes) $u_0, u_1, ... u_n, ...$ sont appelés termes de la série, et $u_n$ est appelé terme général de la série .*
*Considérons maintenent les sommes partielles suivantes :*

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k. \end{aligned} \tag{1.2}$$

*Le nombre $S_n$ est appelé somme partielle d'ordre $n$ de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et la suite $(S_n)$ est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.*

**Définition 1.1.2.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels ou complexes. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)$ converge, et qu'elle diverge si la suite des sommes partielles diverge.*

**Définition 1.1.3.** *Lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on appelle somme de la série, la limite $S$ de la suite des sommes partielles et on écrit :*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\geq 0} u_n. \tag{1.3}$$

**Définition 1.1.4.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série converge de somme $S$. On appelle reste d'ordre $n$ de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, le nombre $R_n$ qui défini par :*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k\geq n+1} u_k. \tag{1.4}$$

*On a alors l'équivalence suivante :*

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} R_n = 0. \tag{1.5}$$

**Remarque 1.1.** *On en déduit aussi que la nature d'une série ne change pas, en supprimant un nombre fini de ses termes. En revanche, si la série converge, la valeur de sa somme dépend de tous les termes de la série.*

**Exemple 1.1.1.** *(Série géométrique)*
*La série géométrique $\sum_{n\geq 0} R^n$ est :*

1. *convergente si et seulement si $|R| < 1$, dans ce cas $S = \dfrac{1}{1-R}$.*
2. *divergente si et seulement si $|R| \geq 1$.*

**Proposition 1.1.1.** *( **Procédé télescopique**) Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de nombres réels ou complexes, telles que $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$converge si et seulement si la suite $(v_n)$converge, et dans ce cas :*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0. \tag{1.6}$$

*Démonstration.* En effet, la preuve se faite de l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{k+1} - v_0.$$

□

**Exemple 1.1.2.** *(exemple sur la convergence) Consédirons la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}, n \geq 1.$
*Le terme $u_n$ peut se réécrire sous la forme :*

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, n \geq 1.$$

*La somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ vérifiée :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

*Puisque* $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, *il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente de somme* $S = 1$.

**Exemple 1.1.3.** *(exemple sur la divergence) Consédirons la série de terme général* $u_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n}), n \geq 1.$
*Le terme $u_n$ peut se réécrire sous la forme :*

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n), n \geq 1. \tag{1.7}$$

*La somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ vérifiée :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

*Puisque* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, *il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.*

**Proposition 1.1.2.** *( Condition nécessaire de convergence***)** *Pour qu'une série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ soit convergente, il est nécessaire que son terme général $u_n$ tend vers zéro.*

*Démonstration.* En effet. Supposons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge vers $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0. \tag{1.8}$$

**Corollaire 1.1.1.** *(Condition suffisante de divergence) Une condition suffisante pour qu'une série soit divergente, est que son terme général ne tend pas vers zéro.*

**Corollaire 1.1.2.** *La réciproque de la Proposition 1.1.2, est fause en général. En effet, la série* ***harmonique*** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors que son terme général tend vers zéro.*

□

## 1.2 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

**Proposition 1.2.1.** *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques ou complexes. On a alors les propriétés suivantes :*

*1. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente de somme $S_1$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente de somme $S_2$, alors $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente de somme $S_1 + S_2$.*

*2. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente de somme $S_1$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ ), alors $\sum_{n\geq 0} (\alpha u_n)$ est convergente de somme $\alpha S_1$.*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition découle immédiatement des propriétés des limites de suites. □

**Remarque 1.2.** *Avec ces deux opérations précédente, on peut facilement démontrer que l'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel.*

## 1.3 Autre opérations algébriques sur les séries numériques

**Proposition 1.3.1.** *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries numériques ou complexes. On a alors les propriétés supplémentaires suivantes :*

*1. Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge et si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$*, alors* $\sum_{n\geq 0} (\alpha u_n)$ *diverge.*

*2. Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et si* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *diverge.*

*3. Si les deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont divergente, on ne peut rien conclure sur la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$*, elle peut être convergente, comme elle peut être divergente.*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition découle immédiatement des propriétés des limites de suites. □

## 1.4 Critère de Cauchy

**Théorème 1.4.1.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes réels ou complexes . Cette série est convergente si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0,\ on\ a\ \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| < \epsilon. \tag{1.9}$$

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème se déroule en utilisant le critère de Cauchy à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et le fait que $S_p - S_q = \sum_{k=q+1}^{p} u_k$. □

## 1.5 Séries à termes positifs

**Définition 1.5.1.** *On appelle série à terme positif, tout série dont le terme général* $u_n$ *vérifie :*

$$u_n \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{1.10}$$

**Proposition 1.5.1.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes réels positifs . Alors cette série converge vers* $S$*, si et seulement si la suite* $(S_n)$ *de ses sommes partielles est majorée. Dans ce cas, on a :*

$$S_n \leq S, \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{1.11}$$

*Démonstration.* Puisque $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, pour tout $n \geq 0$, il en résulte que $(S_n)$ est croissante, donc pour qu'elle soit convergente, il faut et il suffit qu'elle soit majorée. Dans ce cas, la limite de la suite des sommes partielles $(S_n)$ majore tous les termes de la suite. □

**Remarque 1.3.** *Si* $(S_n)$ *n'est pas majorée,* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$*, et la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*

## 1.5.1 Théorèmes de comparaison

**Théorème 1.5.1.** *Etant donnés deux séries à termes positis* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *vérifiant :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que pour tout } n \geq n_0, u_n \leq v_n, \tag{1.12}$$

*on a alors :*

1. $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge implique* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge implique* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

*Démonstration.* 1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Puisque $u_n \leq v_n$, pour tout $n \geq n_0$, on obtient alors :

$$S_n \leq T_n, \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{1.13}$$

Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, la suite $(T_n)$ est donc majorée, alors la suite $(S_n)$ est également majorée et ainsi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. La deuxième propriété est la contraposée de la première, donc est vraie aussi. □

**Corollaire 1.5.1.** *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positis. Supposons qu'il existe deux nobres réels strictement positifs* $\alpha$ *et* $\beta$ *vérifiant :*

$$\alpha u_n \leq v_n \leq \beta u_n, \tag{1.14}$$

*alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

*Démonstration.* L'application du Théorème 1.5.1 deux fois, nous donne : si la série de terme général $v_n$ converge, la série de terme général $u_n$ converge et si la série de terme général $u_n$ converge, la série de terme général $v_n$ converge. Ce qui montre que les deux séries sont de même nature. □

**Exemple 1.5.1.** *Considérons la série numérique de terme général :*

$$u_n = \frac{\theta^n}{\sqrt{n}}\,,\ \theta \geq 0 \text{ et } n > 0. \tag{1.15}$$

* *Si* $\theta \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. *Puisque* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge, la série considérée diverge également.*
* *Si* $0 \leq \theta < 1$, $u_n \leq \theta^n$. *Puisque* $\sum_{n\geq 1} \theta^n$ *converge (série géométrique), la série considérée converge également.*

**Théorème 1.5.2.** *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons quil existe un réel positif* $l$ *(ou* $l = +\infty$*), tel que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$*, on a alors :*
*1. Si* $l = 0$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
*2. Si* $l = +\infty$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*
*3. Si* $l \neq 0$ *et* $\neq +\infty$*, les deux* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *sont de même nature.*

*Démonstration.* 1. Par définition

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a } \frac{u_n}{v_n} < \epsilon. \tag{1.16}$$

Choisissons $\epsilon = 1$, on a donc $u_n < v_n$. Puisque la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge également.
2. De même

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a } \frac{v_n}{u_n} < \epsilon. \tag{1.17}$$

Choisissons $\epsilon = 1$, on a donc $u_n > v_n$. Puisque la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge également.

3. Si $l \neq 0$ et $\neq +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a} \left(\frac{u_n}{v_n} - l\right) < \epsilon. \tag{1.18}$$

Choisissons $\epsilon < l$, on a donc $(l-\epsilon)v_n < u_n < (l+\epsilon)v_n$. L'utilisation du Corollaire 1.5.1 confirme le résultat, en prenant $\alpha = l - \epsilon > 0$ et $\beta = l + \epsilon$. □

**Théorème 1.5.3.** *(Théorème de Chauchy)*

*Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction définie positive, continue et décroissante, alors la série à termes positifs $\sum_{n\geq1} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.*

*Démonstration.* Soit $(S_n)$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq1} f(n)$. Puisque $f$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on peut écrire :

$$\text{pour tout } k = 1, 2, ...,\ x \in ]0, +\infty[\ ,\ \text{tel que } k \leq x \leq k+1,\ \text{on a } f(k+1) \leq f(x) \leq f(k). \tag{1.19}$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on trouve :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k),\ \text{pour tout } k = 1, 2, ... \tag{1.20}$$

En sommant ces dernières égalités, on obtient :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n. \tag{1.21}$$

* Supposons que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, on peut voire alors :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.22}$$

Ce qui montre que la suite $(S_{n+1})$ est majorée, et par suite la série $\sum_{n\geq1} f(n)$ converge.

* Supposons maintenant que $\sum_{n\geq1} f(n)$ converge. On sait bien que :

$$n \leq x < n+1,\ \text{pour tout } x \geq 1, \tag{1.23}$$

où l'entier $n$ représente la partie entière de $x$. On a alors :

$$\int_1^x f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n. \tag{1.24}$$

Puisque $(S_n)$ est majorée, l'intégrale $\int_1^x f(x)dx$ l'est aussi, ce qui assure l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Il en résulte également par contraposée, que la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ entraîne la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

□

### 1.5.2 Régles usuelles de convergence

#### Régle de Riemann

La règle de Riemann revient à comparer une série à termes positifs donnée à une série de Riemann.

**Définition 1.5.2.** *On appelle série de Riemann, toute série numérique dont le terme général* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

**Proposition 1.5.2.** *La série de Riemann est convergente pour tout* $\alpha > 1$.

*Démonstration.* Si $\alpha \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est donc divergente.
Supposons maintenant que $\alpha > 0$ et consédirons la fonction $f$ qui définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.
Cette fonction est définie positive, continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ .D'après le Théorème 1.5.3, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.
Posons

$$F(x) = \int_1^y f(x)dx = \begin{cases} \ln(y), \text{ si } \alpha = 1, \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha \neq 1. \end{cases} \tag{1.25}$$

La fonction $F$ a une limite finie, si et seulement si $\alpha > 1$, ce qui montre que La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

**Proposition 1.5.3.** *(Règle de Riemann)*

*Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels positifs et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons quil existe un réel positif $l$ (ou $l = +\infty$) , tel que $\lim n^\alpha u_n = l$ . On a alors :*

*1. Si $l = 0$ et $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.*

*2. Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.*

*3. Si $l \neq 0$ et si $l \neq +\infty$, les deux séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.*

*Démonstration.* 1. Par définition

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a } n^\alpha u_n < \epsilon. \tag{1.26}$$

Choisissons $\epsilon = 1$, on a donc $u_n < \frac{1}{n^\alpha}$. Puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge également pour tout $\alpha > 1$.

2. Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, toujours d'après la définition de la limite

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1,\ \text{on a } n^\alpha u_n > \epsilon. \tag{1.27}$$

Choisissons $\epsilon = 1$, on a donc $u_n > \frac{1}{n^\alpha}$. Puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge pour tout $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge également pour tout $\alpha \leq 1$.

3. La troisième propriété est l'intersection des propriétés 1 et 2. □

## Règle de d'Alembert

La régle de d'Alembert revient à comparer une série à termes positifs à une série géométrique.

**Proposition 1.5.4.** *Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe un réel positif $l$ (ou $l = +\infty$), tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ . On a alors :*

*1. Si $l < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.*

*2. Si $l > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.*

*Démonstration.* Par définition

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \epsilon. \tag{1.28}$$

1. Si $l < 1$, choisissons $\epsilon$, tel que $l + \epsilon = k < 1$, on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k = \frac{v_{n+1}}{v_n}$( en posant $v_n = k^n$). Nous avons donc :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n} < ....\frac{u_0}{v_{n0}} = a\ (a > 0). \tag{1.29}$$

C'est-à-dire $u_n < av_n$.Puisque $\sum\limits_{n\geq1} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge .

2. Si $l > 1$, choisissons $\epsilon$, tel que $l - \epsilon = k \geq 1$, on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Puisque $(u_n)$ est croissante non identiquement nulle, on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, et alors la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ diverge. □

## Règle de Cauchy

La régle de Cauchy revient également à comparer une série à termes positifs à une série géométrique.

**Proposition 1.5.5.** *Soit $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe un réel positif $l$ (ou $l = +\infty$), tel que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ . On a alors :*

*1. Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge.*
*2. Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ diverge.*

*Démonstration.* Par définition

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a} \left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \epsilon. \tag{1.30}$$

1. Si $l < 1$, choisissons $\epsilon$, tel que $l + \epsilon = k < 1$, on a donc $u_n < k^n$. Puisque $\sum\limits_{n\geq1} k^n$ converge pour tout $k < 1$(série géométrique), la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge également .

2. Si $l > 1$, choisissons $\epsilon$, tel que $l - \epsilon = k \geq 1$, on a donc $u_n \geq 1$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge .

□

## Régle de Raab et Duhamel

La régle de Raab et Duhamel revient à comparer une série à termes positifs donnée à une série de Riemann.

**Proposition 1.5.6.** *Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs. Supposons que la limite suivante existe :*

$$l = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1), \tag{1.31}$$

*on a alors :*

*1. Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.*

*2. Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.*

*Démonstration.* Par définition :

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \text{on a : } l-\epsilon < n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1) < l+\epsilon. \tag{1.32}$$

1. Supposons que $l > 1$ et choisissons $\epsilon$, tel que $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) > l - \epsilon = q > 1$.

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $m \in ]1, q[$, la série de terme général $w_n = \frac{1}{n^m}$ est donc convergente.

On peut écrire :

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m. \tag{1.33}$$

En effectuant le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, on obtient :

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{n^2}\delta(n), \tag{1.34}$$

où $\frac{\delta(n)}{n} \to 0$, quand $n \to +\infty$. C'est-à-dire :

$$\text{Pour tout } \eta = q - m > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1,\ \text{on a : } \frac{\delta(n)}{n} < q - m. \tag{1.35}$$

On a alors les inégalités suivantes :

$$m + \frac{\delta(n)}{n} < q < n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1), \text{ pour tout } n \geq \max(n_0, n_1) = n_2, \tag{1.36}$$

ou d'une manière équivalente :

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{n^2}\delta(n) \leq \frac{u_n}{u_{n+1}}. \tag{1.37}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{u_{n+1}}{w_{n+1}} \leq \frac{u_n}{w_n} \leq \ldots \leq \frac{u_{n_2}}{w_{n_2}} = a \; (a > 0 \tag{1.38}$$

Puisque $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ est convergente, il en résulte d'après le théorème de comparaison que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est également convergente.

2. Supposons maintenant que $l < 1$ et choisissons $\epsilon$, tel que

$$n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) < l + \epsilon = q \leq 1, \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{1.39}$$

Considérons également la série de terme général $w_n = \frac{1}{n}$, qui est divergente. De l'inégalité (1.39), on peut voir facilement :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{w_n}{w_{n+1}}. \tag{1.40}$$

Puisque $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ est divergente, il en résulte d'après la méthode précédente que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est également divergente.

□

## Série de Bertrand

**Définition 1.5.3.** *On appelle série de Bertrand, toute série numérique dont le terme général* $u_n = \dfrac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

**Proposition 1.5.7.** *La série de Bertrand est :*

*1. convergente, si et seulement si*

*1.1.* $\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$, *ou bien*

*1.2.* $\alpha = 1$ *et* $\beta < -1$.

*2. divergente si et seulement si*

*2.1.* $\alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$, *ou bien*

2.2. $\alpha = 1$ *et* $\beta \geq -1$.

*Démonstration.* 1.1. Supposons que $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\gamma \in ]1, \alpha[$ vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha-\gamma}} = 0, \text{ car } \alpha - \gamma > 0. \tag{1.41}$$

Puisque $\gamma > 1$, l'utilisation de la Proposition 1.5.3 confirme la convergence de la série considérée.

1.2 et 2.2. Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Le terme général $u_n$ devient : $u_n = \dfrac{\ln^{\beta}(n)}{n}$.

* Si $\beta = 0$, $\sum\limits_{n \geq 1} u_n = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ qui est divergente.

* Si $\beta > 0$, en appliquant une fois encore la règle de Cauchy, on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} n u_n = \lim_{n \to +\infty} \ln^{\beta}(n) = +\infty, \tag{1.42}$$

et la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

* Si $\beta < 0$, considérons la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}}, x \in ]\delta, +\infty[ \ (\delta > 1). \tag{1.43}$$

Cette fonction est définie positive, continue et décroissante sur $]\delta, +\infty[$. D'après le théorème de Cauchy, la série $\sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}}$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx$ sont de même nature.

On sait bien que

$$\int_{\delta}^{t} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta+1} \left[\ln^{\beta+1}(t) - \ln^{\beta+1}(\delta)\right], \text{ si } \beta \neq -1, \\ \ln\left(\dfrac{\ln t}{\ln \delta}\right), \text{ si } \beta = -1. \end{cases} \tag{1.44}$$

Ce qui donne :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\delta}^{t} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} -\dfrac{\ln^{\beta+1}(\delta)}{\beta+1}, \text{ si } \beta < -1, \\ +\infty, \text{ si } \beta > -1, \\ +\infty, \text{ si } \beta = -1 \end{cases} \tag{1.45}$$

Donc, si $\alpha = 1$ et $\beta < -1$, l'intégrale $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx$ converge, alors que si $\alpha = 1$ et $\beta \geq -1$, l'intégrale $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx$ diverge.

2.2 Supposons maintenant que $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\gamma \in ]\alpha, 1[$ vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n \to +\infty} n^{\gamma - \alpha} \ln^{\beta}(n) = +\infty, \text{ car } \gamma - \alpha > 0. \tag{1.46}$$

Puisque $\gamma < 1$, l'utilisation de la Proposition 1.5.3 confirme la divergence de la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$. □

## 1.6 Séries à termes de signes quelconques

### 1.6.1 Règles de convergence des séries à termes de signes quelconques

#### Règle d'Abel

**Proposition 1.6.1.** *Soit $(b_n)$ une suite positive décroissante vers 0, et soit $(a_n)$ une suite vérifiant :*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq M. \tag{1.47}$$

*Alors, la série de terme général $u_n = a_n b_n$ est convergente.*

*Démonstration.* On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1}^{+\infty} u_n &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_n - b_{n-1}) + \ldots \\
&= \sum_{n \geq 1}^{+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_n - b_{n+1}) \\
&= \sum_{n \geq 1}^{+\infty} A_n (b_n - b_{n+1}).
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Nous pouvons voire ensuite apparaître la série de terme général :

$$v_n = A_n(b_n - b_{n+1}). \tag{1.49}$$

Il nous suffit de montrer que cette série est convergente. En effet :

$$\begin{aligned} |v_n| &= |A_n(b_n - b_{n+1})| \\ &\leq M(b_n - b_{n+1}), \text{ car } b_n - b_{n+1} \geq 0 \text{ } ((b_n) \text{ est décroissante}). \end{aligned} \tag{1.50}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ est convergente, puisque la suite de ses sommes partielles vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \to b_1, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{1.51}$$

Le théorème de comparaison affirme la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} v_n$. Il en résulte que la série de départ $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} u_n$ est convergente. □

### 1.6.2 Séries alternées

**Définition 1.6.1.** *On appelle série alternée, toute série dont le terme général*

$$u_n = (-1)^n a_n, a_n \geq 0, \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.52}$$

#### Règle de convergence des séries alternées

**Proposition 1.6.2.** *(Critère de Leibniz)*
*Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série alternée. Si $(|u_n|$ une suite décroissante vers $0$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente, de plus on a la majoration du reste suivante :*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (\text{-}1)^k u_k\right| \leq u_{n+1}. \tag{1.53}$$

*Démonstration.* La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est alternée, on peut donc écrire :

$$u_n = u_n = a_n \times b_n, \text{ tels que } b_n = (-1)^n \text{ et } a_n \geq 0, \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.54}$$

Puisque $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq 1$ et ($|u_n| = a_n$) une suite décroissante vers 0, l'utilisation de critère d'Abel montre la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
Soit maintenant $(S_n)$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, on a alors

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0, \tag{1.55}$$

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n+1} + u_{2n} \geq 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.56}$$

Ainsi la suite $(S_{2n})$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})$ est croissante. De plus on a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.57}$$

Ce qui montre que la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$ tend vers 0. Les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont donc adjacentes et ainsi convergent toutes les deux vers une même limite finie $S$. Par conséquent la suite $(S_n)$ converge vers $S$, ce qui montre une fois encore que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. De plus, on a :

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + u_{2n+2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.58}$$

C'est-à-dire

$$S - S_{2n+2} =\leq u_{2n+2}, \text{ pour tout } n \in \tag{1.59}$$

De même :

$$S_{2n} - u_{2n+1} = S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{1.60}$$

ou d'une manière équivalente :

$$-u_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1.61}$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| = |S - S_n| \leq u_{n+1}, \tag{1.62}$$

où $S$ est la somme de la série. □

### 1.6.3 Séries absolument convergentes

**Définition 1.6.2.** *On dit qu'une série de terme général $u_n$ converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ converge.*

**Proposition 1.6.3.** *Si la série numérique de terme général $u_n$ converge absolument, alors cette série est convergente.*

*Démonstration.* Supposons que la série de terme général $u_n$ converge absolument. En appliquant le critère de Cauchy à la série de terme général $|u_n|$, on trouve :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0,\ \text{on a } \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| < \epsilon. \tag{1.63}$$

D'autre part, on a :

$$\left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| < \epsilon. \tag{1.64}$$

La série du terme général $u_n$ vérifie alors le critère de Cauchy. Cette série est donc bien convergente. □

**Remarque 1.4.** *La réciproque de cette proposition est fausse. A titre d'exemple, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors qu'elle ne converge pas absolument.*

**Proposition 1.6.4.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique à termes quelconques. Supposons qu'il existe une suite numérique positive vérifiant :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \textit{et que } \forall n \geq n_0,\ \textit{on a } |u_n| \leq v_n, \tag{1.65}$$

*alors, si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.*

*Démonstration.* La preuve se déroule immédiatement, en utilisant le théorème de comparaison des séries à termes positifs. □

### 1.6.4 Séries semi-convergentes

**Définition 1.6.3.** *On dit qu'une série de terme général $u_n$ est semi-convergente, lorsqu'elle converge sans être absolument convergente.*

On a également les propriétés immédiates suivantes :

**Proposition 1.6.5.** *Supposons que les deux séries de termes généraux respectifs $u_n$ et $v_n$sont absolument convergentes (respectivement semi-convergentes), alors la série somme de terme général $(u_n + v_n)$ est absolument convergente (respectivement semi-convergente), et la série produit par un scalaire de terme général $\alpha u_n$ est absolument convergente (respectivement semi-convergente), pour tout $\alpha \in \mathbb{k}(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition se déroule immédiatement en utilisant le critère de Cauchy. □

**Exemple 1.6.1.** *On peut démontrer facilement que la série de Riemann alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est :*

* *divergente pour tout $\alpha \leq 0$,*

* *absolument convergente, pour tout $\alpha > 1$,*

* *semi-convergente, pour tout $0 < \alpha \leq 1$.*

### 1.6.5 Propriétés supplémentaires des séries convergentes

#### Propriété1 : Utilisation des critères de d'Alembert et de Cauchy

On sait que ces deux critères s'appliquent a priori à des séries à termes positifs. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes quelconques. Nous pouvons donc parfaitement utiliser ces critères avec des séries à termes quelconques, mais en faisant très attention à ne pas oublier les valeurs absolues.
Supposons maintenant que $l_2 = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe (respectivement $l_2 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ existe).

* Si $l_1 < 1$ (respect. $l_2 < 1$), le critère de d'Alembert (resp. le critère de Cauchy) affirme que la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est alors absolument convergente.

* Si $l_1 > 1$ (respect. $l_2 > 1$), le critère de d'Alembert (resp. le critère de Cauchy) affirme que le terme général $|u_n|$ tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est alors divergente.

**Exemple 1.6.2.** *La série de terme génaral :* $u_n = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)^{3n} \alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $n \geq 0$. *Nous avons* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 27\,|\alpha|$ *. le critère de Cauchy affirme que :*

1. *Si* $|\alpha| < \frac{1}{27}$, *la série considéré est absolument convergente.*
2. *1. Si* $|\alpha| > \frac{1}{27}$, *la série considéré est divergente.*
3. *Si 1. Si* $|\alpha| = \frac{1}{27}$, *la valeur absolue de terme général devient*

$$|u_n| = \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{3n} = \left(1 - \frac{2}{3n+3}\right)^{3n} \to \exp(-2)(\neq 0), \text{ quand } n \to +\infty, \tag{1.66}$$

*et la série considérée est divergente.*

## Propriété 3 : Utilisation des développements limités

En effectuant un développement limité du terme général $u_n$ de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ au voisinage de l'infini à un ordre suffisamment élevé (pour être avoir un reste absolument convergente), on peut conclure rapidement sur la nature de cett série. On arrive finalement à faire apparaître des termes en $\frac{1}{n}$ (exprimant a prioré une série divergente) et (ou) des termes en $\frac{1}{n^2}$ (exprimant a prioré une série convergente).
A titre d'exemple, la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. On peut écrire :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}. \tag{1.67}$$

En effectuant le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\epsilon(n), \text{ où } \epsilon(n) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Nous avons donc la somme de deux séries convergentes et d'une reste absolument convergente. la série considéré est donc convergente.

## 1.7 Produit de Cauchy des séries.

**Définition 1.7.1.** *On considère deux séries numériques de termes généraux respectifs $u_n$ et $v_n$. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries, la série de terme général :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}. \tag{1.69}$$

**Proposition 1.7.1.** *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série de produit de Cauchy de terme général défini par (1.69) est absolument convergente, et de plus, on a :*

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right). \tag{1.70}$$

*Démonstration.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons les sommes partielles suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, T_n = \sum_{k=0}^{n} v_n \text{ et } R_n = \sum_{k=0}^{n} w_n. \tag{1.71}$$

Considérons également les notations suivantes :

$$S = \sum_{n\geq 0} |u_n| \text{ et } T = \sum_{n\geq 0} |v_n|. \tag{1.72}$$

Les deux suites $(S_n)$ et $(T_n)$ sont convergentes, donc elles vérifient le critère de Cauchy suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, n \in \mathbb{N}, p > n \geq n_0, \text{ on a } \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| < \epsilon \text{ et } \left|\sum_{k=n+1}^{p} v_k\right| < \epsilon, \tag{1.73}$$

D'une part, $R_{2n} - S_nT_n$ peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} R_{2n} - S_nT_n &= u_0(v_{n+1} + \dots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \dots + v_{2n-1}) + \dots + u_{n-1}v_{n+1} \\ &\quad + v_0(u_{n+1} + \dots + u_{2n}) + v_1(u_{n+1} + \dots + u_{2n-1}) + \dots + v_{n-1}u_{n+1} \end{aligned} \tag{1.74}$$

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, $p > n \geq n_0$, on a alors

$$\begin{aligned} |R_{2n} - S_nT_n| &\leq \epsilon\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \sum_{k=0}^{n} |v_k|\right) \\ &\leq \epsilon(S + T). \end{aligned} \tag{1.75}$$

Donc $(R_{2n})$ est convergente, et de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} R_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_nT_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right). \tag{1.76}$$

D'autre part, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |R_{2n+1} - R_{2n}| &= |(u_0v_{2n+1} + \dots + u_{n+1}v_n) + (v_0u_{2n+1} + \dots + v_{n+1}u_n)| \\ &\leq \epsilon(S + T), \end{aligned} \tag{1.77}$$

ce qui assure la convergence de $(R_{2n+1})$.
Puisque $(R_{2n})$ et $(R_{2n+1})$ sont convergentes, $(R_n)$ est également convergente, et de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} R_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} R_{2n} = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right). \tag{1.78}$$

C'est-à-dire :

$$\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right). \tag{1.79}$$

□

# Bibliographie


[1] J. Lelong Ferrand. Exercices résolus d'analyse. *Edition Dunod*, (1977).

[2] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès. Cours de mathématiques. *tome 2, Edition Dunod*, (1978).

[3] J. Rivaud. Analyse «Séries, équations différentielles : Exercices avec solutions. *Vuibert*, (1981).

[4] C. Servien. Analyse 3 : Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales. *Ellipses*, (1995).