Optimisation linéaire

I-Introduction

I- 1- L'optimisation

En général optimiser signifie le fait de chercher une configuration optimale d'un système, c'est à dire, chercher la meilleure configuration parmi tous les configurations possibles du système et ceci, par rapport à un critère donné.

L'optimisation est une branche des mathématiques. Dans la pratique, on part d'un problème concret, on le modélise et on le résout mathématiquement (analytiquement : problème d'optimisation, numériquement : programme mathématique).

I-2- La Modélisation :

Pour décrire (et éventuellement résoudre) un problème d'optimisation nous utilisons la modélisation mathématique. Modéliser un problème consiste à identifier : les variables intrinsèques (inconnues), les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables, l'objectif visé (optimisation).

I-3- Lien minimum/maximum : soit f une fonction $f : S \to R$ dont on veut trouver le maximum. Le problème $\max_{x \in S} f(x)$ renvoit (x_0, v) alors que le problème $\min_{x \in S} f(x)$ renvoit $(x_0, -v)$. D'où ce lien. Ainsi la recherche d'un maximum peut toujours se ramener à la recherche d'un minimum.

I-4- Problématique

Etant donnée une fonction $f : S \to R$, un problème d'optimisation consiste à trouver :

1- son minimum v (respectivement. son maximum) dans S

2- un point $x_0 \in S$ qui réalise ce minimum (respectivement. maximum) i.e. $f(x_0) = v$.

Appellations

– f est la fonction objectif

– v est la valeur optimale

– x_0 est la solution optimale

– S = {solutions réalisables du problème}

– écriture du problème : $\min_{x \in S} f(x)$ resp. $\max_{x \in S} f(x)$

II- Programmation linéaire

C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. Dans un problème de programmation linéaire (PL) les contraintes et l'objectif sont des fonctions linéaires des variables. On parle alors de programme linéaire. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans IR+ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans IN. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.

II-1-Formulation générale d'un programme linéaire

Le problème consistant à trouver un ***extremum*** (maximum ou minimum) d'une fonction à plusieurs variables, vérifiant en outre un système ***d'équations*** ou ***d'inéquations***, ces fonctions étant ***linéaires***.

La fonction à optimiser est baptisée ***fonction coût.***

Ou bien sous une autre manière, la programmation linéaire permet la résolution d'un programme linéaire. Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "***contraintes***" qui sont linéaires (c'est-à-dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles...). Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

II-2- La forme canonique :

Pour résoudre un programme linéaire de manière automatique, il faut qu'il ait une certaine forme que l'on appelle "***canonique***". On choisit la forme canonique suivante : un programme linéaire n'a que des contraintes d'infériorité et l'on tente de maximiser la fonction objectif. De plus toutes les variables sont positives.

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est à dire un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

- **Définition :**

Lorsqu'on peut modéliser un problème sous forme d'une fonction économique à maximiser dans le respect de certaines contraintes, alors on est typiquement dans le cadre de la programmation linéaire.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \le b_i, & \text{pour} \quad 1 \le i \le m \\ x_j \ge 0, & \text{pour} \quad 1 \le j \le n \end{array}}$$

Fonction économique

m: contraintes

n: nbre de variables $x_1, \ldots, x_n$

Z max fonction économique qu'on doit maximiser. On a ***m contraintes*** et et ***n variables***. Une solution admissible est une solution qui vérifie toutes les contraintes ; parmi ces solutions admissibles celle(s) pour la(les)quelle(s) la fonction économique est ***maximale (minimale),*** s'appelle(nt) ***solution(s) optimale(s).***

Propriété : Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\mathrm{Min}(z) = -\max(-z)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \end{cases}$$

$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$ changement de variable $x'_j = -xj$ dans le PL

si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose $xi = x'_i - x''_i$, avec

$x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Remarques:

1. Contraintes non linéaires :

$2\, x_1^2 + x_2 \leq 12$

$5x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 = 8$

$x_1 x_2 + 8x_3 \geq 25$

Elles sont impossibles d'être résolu avec cet outil.

2. Si une variable x_1 est négative, on la remplace par une variable positive $x_1' = -x_1$. Par exemple :

$$\begin{array}{lcl} \max:\ z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \max:\ z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3' \\ \text{sous:} & & \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & & 9x_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \leq 0 & & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3' \geq 0 \end{array}$$

3. Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x_1' et x_1'' telles que $x_1 = x_1' - x1''$. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \qquad \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \\ & \\ \text{sous:} & \qquad \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \qquad 5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow \quad x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & \qquad 9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17 \\ x_1 , x_2 \geq 0 & \qquad x_1 , x_2 , x_3' , x_3'' \geq 0 \end{array}$$

4. Si le programme linéaire a une contrainte de supériorité, on la remplace par une contrainte d'infériorité en inversant le signe des constantes. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \qquad \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ & \\ \text{sous:} & \qquad \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \qquad 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow \quad x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 & \qquad -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 & \qquad x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

5. Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \qquad \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ & \\ \text{sous:} & \qquad \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \qquad 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow \quad x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 & \qquad 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 & \qquad 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\ & \qquad x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ & \\ & \text{sous:} \\ & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ \Rightarrow & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ & -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

III- Exemples de programmes linéaires

III-1 Problème de production

Une entreprise fabrique deux produits P1, P2 dont chaque unité passe dans trois ateliers A1, A2, A3. Chaque unité de produit P1 est vendue 12 D.A et sa fabrication coûte 7 D.A. Chaque unité de produit P2 est vendue 11 D.A et sa fabrication coûte 9 D.A. Les temps de passage (en minutes) de chaque unité de produit dans chaque atelier sont résumés dans le tableau suivant :

	A1	A2	A3
P1	2 min	3 min	3 min
P2	3 min	2 min	1 min

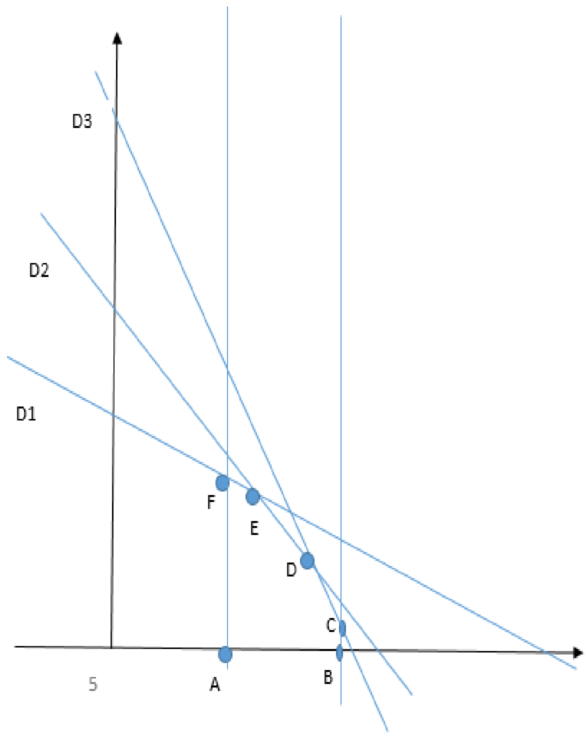
Le temps de travail maximum par jour de l'atelier A1 est de 5h50 min, pour A2 il est de 5 h50 min , pour A3 il est de 5h10min. Pour des raisons commerciales le nombre d'unités de produit P1 doit être compris entre 50 et 100. Calculer le nombre d'unités des produits P1, P2 à fabriquer par jour pour obtenir un bénéfice maximum (en D.A)

- ✓ **Expression du problème : Modélisation**

Bénéfice par unité de produit P1 : 12 -7 = 5 ; pour P2 : 11 - 9 = 2 Si on fabrique x produits P1 et y produits P2

$Z = 5x + 2y$

Les variables sont soumises à un certain nombre de ***contraintes***. A1, A2 et A3 et des capacités de travail de ces ateliers (en minutes)



$2x + 3y \leq 3503x + 2y \leq 350$

$3x + y \leq 310$

$50 \leq x \leq 100$

$x, y \geq 0$

- ✓ **Interprétation géométrique**

D1 : $2x + 3y = 350$

X	0	166.6667
y	175	0

D2 : $3x + 2y \leq 350$

X	0	166.6667
y	175	0

D3 : $3x + y \leq 310$

Δk : max Z = 5 x +2 y
5 x +2 y = k

Recensement des sommets
A(50,0)
B(100,0)
C (intersection de D3 et (x=100)) → $\begin{cases} 3x + y = 310 \\ x = 100 \end{cases}$ → C(100, 10)

D (intersection de D2 et D3) → $\begin{cases} 3x + 2y = 350 \\ 3x + y = 310 \end{cases}$ → D(90, 40)

E (intersection de D1 et D2) → $\begin{cases} 2x + 3y = 350 \\ 3x + 2y = 350 \end{cases}$ → E (70, 70)

F (intersection de D1 et (x=50)) → $\begin{cases} 2x + 3y = 350 \\ x = 50 \end{cases}$ → F(50, 83.33)

En A : Z = 5*50 +2 *0 = 250
En B : Z = 5*100 +2*0 = 500
En C : Z = 5 *100 +2*10 = 520
En D : Z = 5 *90 +2 *40 = 530
En E : Z = 5*70 +2*70 = 490
En F : Z = 5 *50 + 2 * 83.33 = 416.66

La fonction Z atteint son maximum au point D

III-2 Problème de Mélange (Trois variables)

Il faut mélange trois gaz de telle manière que le gaz mixte soit le plus bon marché qui possède un pouvoir calorifique entre 1700 et 2000 k. cal/ m3 et un taux de sulfure au plus de 2,8 g/ m3.

Indications sur les trois gaz

Gaz	Pouroir calorifique en Kcal/m3	Taux de sulfure en g/m3	Prix en
1	1000	6	100
2	200	2	250
3	1500	3	200

Expression du problème
Soient x1, x2 et x3 le nombre de m3 à fabriquer respectivement du 1er, 2eme et du 3ème gaz.

$$Min\ Z = 100\,x_1 + 250\,x_2 + 200\,x_3$$
$$1700 \leq 1000\,x_1 + 2000\,x_2 + 1500\,x_3 \leq 2000$$
$$6\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \leq 2{,}8$$

Ici il y a 3 variables et la solution graphique n'est pas possible dans ce cas

IV- L'algorithme du Simplexe

Lorsque le nombre de variables du problème est strictement supérieur à 2, la méthode graphique devient inopérante. On a alors recours à une méthode algébrique basée sur un algorithme appelé algorithme du simplexe.
Méthode du simplexe par un exemple : Considérons le problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{array}{llrrrcl} \text{maximiser} & z = & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & \\ \text{sous les contraintes} & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq & 5, \\ & & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 11, \\ & & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq & 8, \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0. \end{array} \qquad (1)$$

Afin de se ramener à un système d'équations plutôt que d'inéquations, on introduit les variables d'écart x4, x5, x6 et l'on écrit le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{array}{rcrrrr} x_4 & = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3, \\ x_5 & = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3, \\ x_6 & = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3, \\ z & = & & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3, \end{array} \qquad (2)$$

avec pour but de maximiser z sous les contraintes additionnelles xi ≥ 0, (i = 1, · · ·, 6). Il est recommandé de vérifier que si (x1, x2, x3, x4, x5, x6) est une solution optimale de ce dernier problème (2), alors les variables (x1, x2, x3) correspondants constituent une solution optimale du problème du (1). Inversement, si (x1, x2, x3) est une solution optimale de (1), alors (x1, x2, x3, 5 − 2x1 − 3x2 − x3, 11 − 4x1 − x2 − 2x3, 8 − 3x1 − 4x2 − 2x3) constitue une solution optimale de système (2). Le système (2) possède la solution (0, 0, 0, 5, 11, 8) (non optimale mais solution admissible : satisfaisant à l'ensemble des contraintes). On observe que dans l'expression z = 5x1 +4x2 +3x3, une augmentation de x1 entraine une augmentation de z. L'idée première est alors d'augmenter x1 autant que possible (sans modifier ni x2 ni x3) tant qu'aucune des variables d'écart x4, x5 ou x6 ne devient négative.
Le choix maximal est donc x1 = min(5/2, 11/4, 8/3) = 5/2, lorsque x4 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable (5/2, 0, 0, 0, 3, 1/2). On récrit le système (2) en exprimant cette fois (x1, x5, x6) (ainsi que z) en termes de (x2, x3, x4), au moyen de l'équation (l'équation d'échange qui exprime la variable entrante en fonction de la variable sortante, et éventuellement des autres variables hors base) $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4.$

Ceci donne, après substitutions :

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4, \\ x_5 & = & 1 & +5x_2 & & +2x_4, \\ x_6 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4, \\ z & = & \frac{25}{2} & -\frac{7}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{5}{2}x_4. \end{array} \qquad (3)$$

Cette fois, on observe que dans l'expression z = 25/2 – (7/2).x2 + (1/2).x3 – (5/2).x4, une augmentation de x3 (c'est ici le seul choix possible) entraine une augmentation de z. A nouveau, on augmente donc x3 autant que possible (sans modifier ni x2 ni x4) tant qu'aucune des variables x1, x5 ou x6 ne devient négative. Le choix maximal est donc x3 = min ((5/2)/(1/2),(1/2)/(1/2)) = 1 lorsque x6 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable (2, 0, 1, 0, 1, 0). On récrit le système (3) en exprimant cette fois (x1, x3, x5) (ainsi que z) en termes de (x2, x4, x6), au moyen de l'équation

x3 = 1 + x2 + 3.x4 – 2.x6

Ceci donne, après substitutions :

$$\begin{array}{rcl} x1 & = & 2 - 2.x2 - 2.x4 + x6 \\ x3 & = & 1 + x2 + 3.x4 - 2.x6 \\ x5 & = & 1 + 5.x2 + 2.x4 \\ z & = & 13 - 3.x2 - x4 - x6 \end{array} \qquad (4)$$

Puisque les coefficients de x2, x4 et x6 intervenant dans l'expression de z ci-dessus sont tous négatifs ou nuls, on déduit que la solution réalisable (admissible):

$$\begin{array}{l} x1 = 2 \\ x2 = 0 \\ x3 = 1 \\ x4 = 0 \\ x5 = 1 \\ x6 = 0 \end{array} \qquad (5)$$

est une solution optimale, pour laquelle *z = 13*

- ✓ **Méthode des tableaux**

Reprenons l'exemple de la Leçon 2. La résolution par l'algorithme du simplex se déroule selon 8 étapes avant un nouveau passage.

1ère étape : Écrire le système sous forme standard

Il s'agit convertir le programme établi sous forme canonique (système d'inéquation) sous **la forme standard** (système d'équation avec **variable d'écarts**). Les variables d'écart introduites au cours de cette transformation représentent les contraintes techniques et commerciales disponibles qu'il convient de saturer.

Forme canonique

$$\begin{cases} 3x+2y \leq 1800 \\ x \leq 400 \\ y \leq 600 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ MaxB = 30x+50y \end{cases}$$

Forme standard

e_1, e_2, e_3 représentant les variables d'écart

$$\begin{array}{lllll} 3x+2y+e_1 & & & = 1800 \\ x & & +e_2 & = 400 \\ & y & & +e_3 = 600 \\ 30x+50y & & & \end{array}$$

2ème étape : Construire le premier tableau correspondant à la forme standard

Coefficient Eij

(Zone verte)

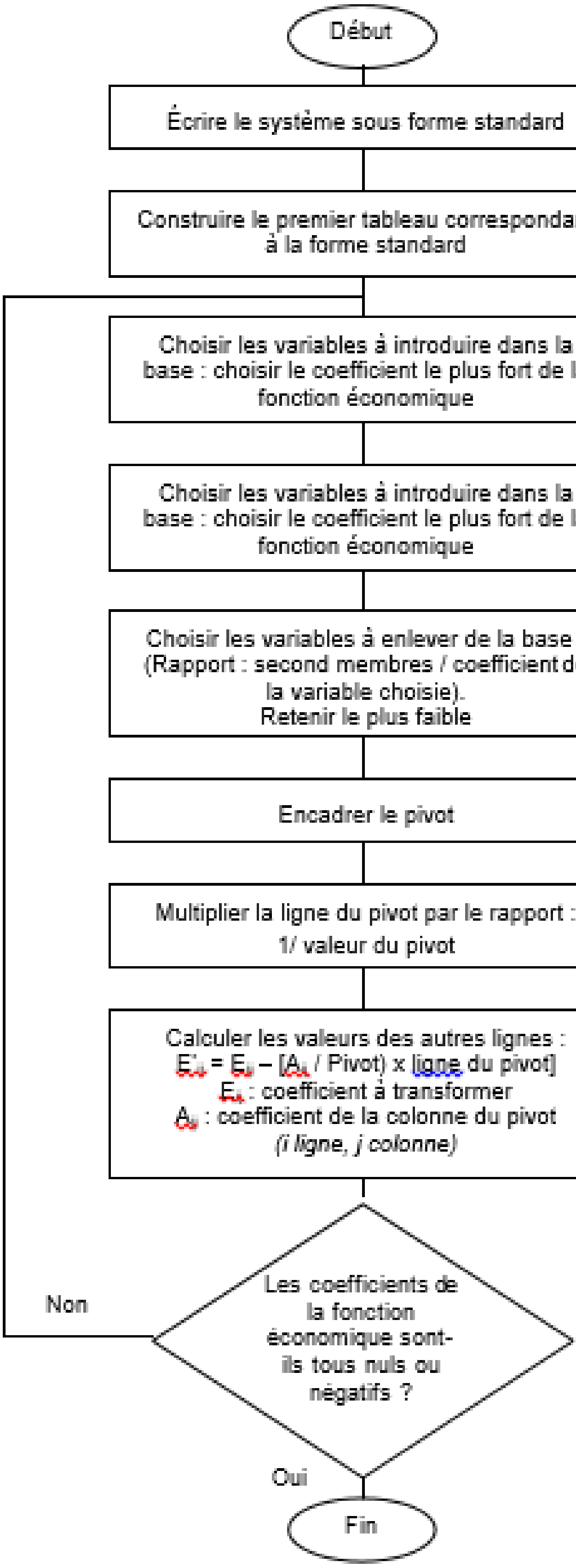
Variables d'écart

Valeur en base (encadré bleu)

Valeur solutions (encadré orange)

	x	y	e1	e2	e3	
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
e_3	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

(zone jaune)


Début
Écrire le système sous forme standard
Construire le premier tableau correspondant à la forme standard
Choisir les variables à introduire dans la base : choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique
Choisir les variables à introduire dans la base : choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique
Choisir les variables à enlever de la base : (Rapport : second membres / coefficient de la variable choisie).
Retenir le plus faible
Encadrer le pivot
Multiplier la ligne du pivot par le rapport :
1/ valeur du pivot
Calculer les valeurs des autres lignes :
$E'_{ij} = E_{ij} – [A_{ij}$ / Pivot) x ligne du pivot]
E_{ij} : coefficient à transformer
A_{ij} : coefficient de la colonne du pivot
(i ligne, j colonne)
Les coefficients de la fonction économique sont-ils tous nuls ou négatifs ?
Non
Oui
Fin

3ème étape : Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus positif de la fonction économique

Le coefficient de la fonction économique (MAX) est 50. Ainsi il s'agit de la variable y qui rentre en base

	x	y	e_1	e_2	e_3	
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
e_3	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

Fonction économique ⇒ MAX

4ème étape : Choisir la variable à faire sortir de la base (rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.

Le second membre (les bi) (encadré vert), nous retenons la valeur la plus faible (en orange) du rapport second membre (en vert)/coefficient de la variable choisie (en bleu clair). Ainsi la variable e_3 est la variable qui sorts de la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre	
e_1	3	2	1	0	0	1800	1800/2 = 900
e_2	1	0	0	1	0	400	400/0 = ∞
e_3	0	1	0	0	1	600	600/1 = 600
MAX	30	50	0	0	0	0	

5ème étape : Encadrer le pivot

Le pivot est égal à 1(encadré en bleu)

E_{ij} A_{ij}

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
e_1	3	2	1	0	0	1800
e_2	1	0	0	1	0	400
y	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

Ligne du pivot ⇒ y

ligne du pivot

pivot

6ème étape : diviser la ligne du pivot par le pivot

E'$_{ij}$

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
e_1						
e_2						
y	0	1	0	0	1	600
MAX						

1/pivot

7ème étape : Calculer les valeurs des autres lignes

$$E'_{ij} = E_{ij} - [(A_{ij} / \text{Pivot}) \times \text{Ligne du pivot}]$$

Cette opération consiste à transformer E_{ij} des autres lignes en E'_{ij}, nous effectuons un calcul matriciel

1ère ligne

3 = 3 – [(2/1) x 0]

0 = 2 – [(2/1) x 1]

1 = 1 – [(2/1) x 0]

0 = 0 – [(2/1) x 0]

- 2 = 0 – [(2/1) x 1]

600 = 1 800 – [(2/1) x 600]

2ème ligne

1 = 1 – [(0/1) x 0]

0 = 0 – [(0/1 x 1]

0 = 0 – [(0/1 x 0]

1 = 1 – [(0/1 x 0]

0 = 0 – [(0/1 x 1]

400 = 400 – [(0/1 x 600]

4ème ligne

30 = 30 – [(50/1) x 0]

0 = 50 – [(50/1) x 1]

0 = 0 – [(50/1) x 0]

0 = 0 – [(50/1) x 0]

- 50 = 0 – [(50/1) x 1]

30 000 = 0 – [(50/1) x 600]

		x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
1 ere ligne	e_1	3	0	1	0	-2	600
2ème ligne	e_2	1	0	0	1	0	400
ligne du pivot	y	0	1	0	0	1	600
4ème ligne	MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

8ème étape : Les coefficients de la fonction économique sont-ils tous nuls ou négatifs ? (si oui nous sommes à l'optimum, sinon nous effectuons un nouveau passage)

Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatifs (30) il convient d'effectuer un nouveau passage.

Nouveau passage :

Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus positif de la fonction économique. Ici c'est 30. Ainsi il s'agit de la variable x qui rentre en base

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
e_1	3	0	1	0	-2	600
e_2	1	0	0	1	0	400
y	0	1	0	0	1	600
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

- ✓ Choisir la variable à faire sortir de la base (rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.

Le second membre, nous retenons la valeur la plus faible (en orange) du rapport second membre /coefficient de la variable choisie. Ainsi la variable e_1 est la variable à enlever de la base.

	x	y	e_1	e_2	e_3	2ème member	
← e_1	3	0	1	0	-2	600	600/3 = 200
e_2	1	0	0	1	0	400	400/1 = 400
y	0	1	0	0	1	600	600/0 = ∞
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000	

- ✓ Le pivot est égal à 3
- ✓ diviser la ligne du pivot par le pivot : 3
- ✓ Calculer les autres de valeur des lignes

2ème ligne

0 = 1 – [(1/3) x 3]
0 = 0 – [(1/3) x 0]
- 1/3 = 0 - [(1/3) x 1]
1 = 1 - [(1/3) x 0]
2/3 = 0 - [(1/3) x -2]
200 = 400 - [(1/3) x 600]

3ème ligne

0 = 0 – [(0/3) x 3]
1 = 1 – [(0/3) x 0]
0 = 0 – [(0/3) x 1]
0 = 0 – [(0/3) x 0]
1 = 1 – [(0/3) x -2]
600 = 600 – [(0/3) x 600]

4ème ligne

0 = 30 – [(30/3) x 3]
0 = 0 – [(30/3) x 0]
- 10 = 0 – [(30/3) x 1]
0 = 0 – [(30/3) x 0]
- 30 = -50 – [(30/3) x -2]
- 36 000 = -30 000 – [(30/3) x 600]

		x	y	e_1	e_2	e_3	2ème membre
ligne du pivot	x	1	0	1/3	0	-2/3	200
2ème ligne	e_2	0	0	-1/3	1	2/3	200
3 ème ligne	y	0	1	0	0	1	600
4 ème ligne	MAX	0	0	-10	0	-30	-36 000

Les coefficients de la fonction économique sont tous nuls ou négatifs, fin de l'algorithme du simplex. La solution qui rend optimal le programme est la suivante :

La marge sur la fonction économique maximum = 36 000, les quantités produites x = 200, y = 600, et on constate que la variable d'écart e_2 n'est pas saturée. Par contre les variables d'écart e_1 et e_3 sont saturées.