Exemple 1.1.6. Un point, une boule, $\mathbb{R}^n$.

Contre-exemples : Deux points, un cercle, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'ensemble vide ...

Définition 1.1.7. Soit X, Y deux espaces topologiques, $A \subseteq X$ un sous-espace, et $f_0, f_1 : X \to Y$ tels que $f_0 \mid_A = f_1 \mid_A$. On dit que f_0 est homotope à f_1 relativement à A s'il existe une application continue $F : X \times \underbrace{[0;1]}_{I} \to Y$ telle que $F \mid_{X \times \{0\}} = f_0$, $F \mid_{X \times \{1\}} = f_1$, et $F \mid_A = f_0 \mid_A = f_1 \mid_A$.

Les propriétés et notations précédentes s'étendent sans difficulté au cas relatif. On notera $\underset{A}{\simeq}$ la relation être homotope relativement à A.

Définition 1.1.8. Un sous-espace $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est un rétract par déformation (resp. déformation forte) s'il existe $p : X \to A$ telle que $p \circ i = id_A$ et $i \circ p \simeq id_X$ (resp. relativement à A).

Exemple 1.1.9. L'exemple standard est la sphère $\mathbb{S}^n$ qui est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

1.2. Groupes d'homotopie d'un espace topologique

Définition 1.2.1. Si X est un espace topologique, on note $\pi_0(X)$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs. Si $x_0 \in X$, et $n \geq 1$, on note $\pi_n(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie relatives (au point base) d'applications $(\mathbb{S}^n, *) \to (X, x_0)$ (autrement dit les applications continues de $\mathbb{S}^n$ dans X qui envoient le point base $*$ sur x_0 modulo les homotopies H telles que $H(*, -) = x_0$).

Notation 1.2.2. On note $[X, Y]$ (resp. $[(X, x_0), (Y, y_0)]$) l'ensemble des classes d'homotopie (resp. relatives) de morphismes $X \to Y$.

Remarque 1.2.3.
a) Si $X \neq \emptyset$, la définition reste valable pour $\pi_0(X, x_0)$ quel que soit $x_0 \in X$.
b) On peut de manière équivalente définir $\pi_n(X, x_0)$ comme étant les classes d'homotopie relative d'applications $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, c'est à dire les classes d'homotopie d'applications envoyant le bord de I^n sur x_0 (et on impose qu'en tout temps $t \in [0, 1]$, l'homotopie $H(-, t) : I^n \times \{t\} \to X$ vérifie aussi cette propriété).

Définition 1.2.4 (Suspension)**.** La suspension d'un espace topologique X est l'espace topologique :

$$\Sigma X := X \times I /_{(x,0)\sim(x',0),(x,1)\sim(x',1)}$$

Définition 1.2.5 (Suspension réduite)**.** La suspension réduite d'un espace topologique *pointé* (X, x_0) est l'espace topologique pointé :

$$\Sigma(X, x_0) := \left(X \times I /_{(x,0)\sim(x',0),(x,1)\sim(x',1),(x_0,t)\sim(x_0,t')}, [(x_0, 0)]\right)$$

où $[(x_0, 0)]$ est la classe d'équivalence du point $(x_0, 0)$.

Exemple 1.2.6. Les sphères sont des suspensions réduites :

$$\Sigma(\mathbb{S}^n, *) \cong (\mathbb{S}^{n+1}, *).$$

Ainsi, $(\mathbb{S}^n, *) \cong \Sigma^n(\mathbb{S}^0, 1)$.