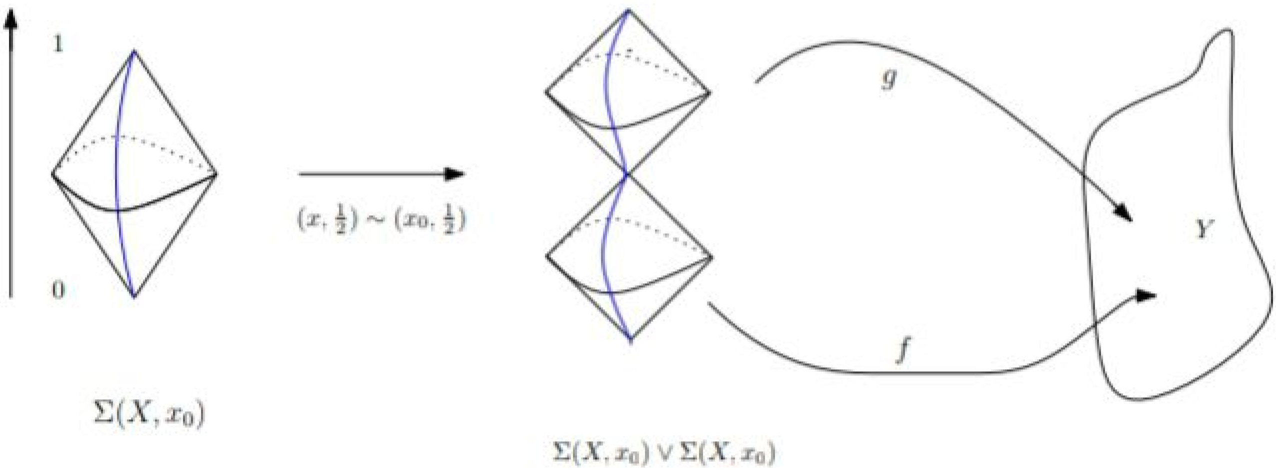

FIGURE 1. La suspension réduite, à gauche, la classe du point base étant représentée en bleu et la définition de $f * g$.

Lorsque X est pointé par un point x_0, on a une application quotient canonique $SX \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0)$. Cette application n'est *pas* toujours une équivalence d'homotopie. Elle l'est cependant dés que (X, x_0) est *bien pointé*[1], voir la feuille de TD 1. C'est en particulier le cas si X est un CW-complexe ou une variété topologique quelconque.

Définition 1.2.7 (Structure produit sur les morphismes de source une suspension)**.** Soient $f, g : \Sigma(X, x_0) \to (Y, y_0)$. On définit $f * g : \Sigma(X, x_0) \to (Y, y_0)$ comme étant la composée :

$$\Sigma(X, x_0) \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0)/_{X \times \{\frac{1}{2}\}} \cong \Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(X, x_0) \xrightarrow{f \vee g} (Y, y_0)$$

voir figure 1. En termes de coordonnées on a donc

$$f * g(x, t) := \begin{cases} f(x, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ g(x, 2t-1) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Proposition 1.2.8. a) La classe d'homotopie de $f * g$ ne dépend que des classes d'homotopie de f et de g.

b) Le produit $*$ est associatif à homotopie près :

$$(f * g) * h \simeq f * (g * h)$$

c) L'application constante $c : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ (définie par $c(x) = y_0$) est une unité pour $*$ à homotopie près :

$$f * c \simeq c * f \simeq f$$

d) Tout $f \in [\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]$ admet un inverse pour $*$: Posons $f^{-1}(x, t) := f(x, 1-t)$. Alors $f * f^{-1} \simeq c \simeq f^{-1} * f$.

Ainsi, $([\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)], *)$ est un groupe, et, en particulier, pour tout $n \geq 1$, on a que *$\pi_n(Y, y_0)$ est un groupe.*

On a une représentation graphique pratique standard pour un élément de $\pi_n(X, x_0)$ donné par la figure 2 où l'on représente également le produit.

1. c'est à dire que l'inclusion du point dans X est une cofibration au sens de la définition 1.8.1