11. Processus de branchement

Les *processus de branchement* fournissent des exemples de martingales auxquelles s'appliquent l'ensemble des résultats précédents. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$, telle que $\mu(1) \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, \mu(k) < \infty$. On note $m = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mu(k)$. On fixe une famille doublement indexée $(\zeta_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi μ. Le *processus de branchement de Galton-Watson* de loi μ est la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies récursivement par

$$Y_0 = 1 \quad ; \quad Y_{n+1} = \sum_{k=1}^{Y_n} \zeta_{n,k}.$$

La variable Y_n représente le nombre d'individus de la n-ième génération aléatoire d'une population dont chaque individu a un nombre d'enfants donné par la loi μ et indépendant des autres progénitures aléatoires. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(k,l) = \mu^{*k}(l), \quad \text{où } \mu^{*k} \text{ est la } k\text{-ième convolée de } \mu.$$

Pour étudier cette chaîne (récurrence, transience, *etc.*), on introduit la martingale $(M_n = \frac{Y_n}{m^n})_{n\in\mathbb{N}}$. C'est bien une martingale, car

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{m^{n+1}}\ \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{r} \zeta_{n,k}\right]_{|r=Y_n} \\ &= \frac{m\,Y_n}{m^{n+1}} = \frac{Y_n}{m^n} = M_n.\end{aligned}$$

En tant que martingale positive, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite presque sûre M_∞, qui est intégrable. On peut alors distinguer 3 cas :

(1) Supposons $m < 1$. Alors, comme Y_n reste un entier pour tout n, en écrivant $Y_n \simeq M_\infty\, m^n$, on en déduit que $Y_n \to 0$ p.s., c'est-à-dire qu'il y a extinction presque sûre (notons que $r = 0$ est un état absorbant de la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(2) Si $m = 1$, alors $Y_n = M_n$ converge presque sûrement. Hors, aucun état de la chaîne sauf 0 n'est absorbant, et d'autre part, une suite à valeurs entières qui converge est stationnaire. Si $Y_n \to r \neq 0$ avec probabilité non nulle, alors Y_n reste stationnaire à r avec probabilité non nulle. Mais par la propriété de Markov et le lemme de Borel-Cantelli, Y_n quitte p.s. l'état r une fois qu'il l'a atteint, ce

qui mène à une contradiction. On conclut que $Y_n \to 0$ p.s., c'est-à-dire qu'il y a de nouveau extinction.

(3) Supposons finalement $m > 1$. L'hypothèse sur $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\mu(k) = h < \infty$ montre que la convergence de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a lieu dans L^2, puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_{n+1})^2] &= \frac{\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{Y_n} \zeta_{n,k})^2]}{m^{2n+2}} = \frac{\mathbb{E}[Y_n]\,h + \mathbb{E}[Y_n(Y_n-1)]\,m^2}{m^{2n+2}} \\ &= \mathbb{E}[(M_n)^2] + \frac{\mathbb{E}[Y_n]\,(h-m^2)}{m^{2n+2}} = \mathbb{E}[(M_n)^2] + \frac{(h-m^2)}{m^{n+2}},\end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[(M_n)^2] \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h-m^2}{m^{n+2}} = \frac{h-m}{m^2-m} < \infty.$$

Donc, $M_n \to M_\infty$ dans L^2 et p.s., et en particulier, $\mathbb{E}[M_\infty] =$

$\mathbb{E}[M_0] = 1$, et $Y_n \to \infty$ avec probabilité positive.

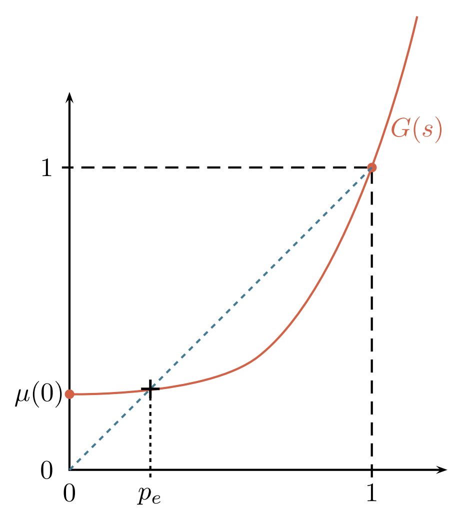
Dans le cas sur-critique $m > 1$, toujours sous l'hypothèse $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mu(k) < \infty$, on peut montrer plus précisément :

Théorème (Processus de branchement sur-critiques). *Soit $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k$ la fonction génératrice de la loi μ. On suppose $m = G'(1) > 1$, et $h = G''(1) + G'(1) < \infty$. La probabilité d'extinction*

$$p_e = \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\right]$$

est l'unique point fixe dans $[0,1)$ de G. De plus, on a aussi $p_e = \mathbb{P}[M_\infty = 0]$, et donc, conditionnellement à la non-extinction, $M_\infty > 0$, c'est-à-dire que Y_n tend vers l'infini a vitesse exponentielle.

Pour démontrer ceci, notons que G et toutes ses dérivées sont des fonctions croissantes sur $[0,1]$, de sorte que G est convexe et a pour allure :



La valeur de G a l'origine est $\mu(0) \geq 0$, $G(1) = 1$, et il existe un unique autre point $t \in [0,1)$ tel que $G(t) = t$. La fonction génératrice G permet de calculer toutes les fonctions génératrices des populations Y_n, car

$$\mathbb{E}[s^{Y_{n+1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{Y_{n+1}}|Y_n]] = \mathbb{E}[G(s)^{Y_n}],$$

de sorte que par récurrence,

$$\mathbb{E}[s^{Y_n}] = G \circ G \circ \cdots \circ G(s) = G^{\circ n}(s).$$

Soit $p_{e,n} = \mathbb{P}[Y_n = 0]$. C'est aussi $G^{\circ n}(0)$, et comme G est croissante $0 \leq G(0) = \mu(0)$, on en déduit la croissance de $Y_{e,n}$ vers sa limite p_e. Comme G est continu, $p_e = G(p_e)$, donc p_e est un point fixe de G. Comme $p_e \neq 1$, $p_e = t$ est l'unique point fixe de G dans $[0,1)$.

Considérons maintenant la probabilité $p_m = \mathbb{P}[M_\infty = 0]$. Notons que compte tenu de la convergence dans L^2, $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$, donc $p_m < 1$. D'autre part, p_m est un point fixe de G. En effet, considérons les processus de Galton-Watson $(Y_n^{(i)})_{i \in [\![1,Y_1]\!]}$ correspondant aux Y_1 individus de la première génération. Conditionnellement à Y_1, il s'agit de Y_1 processus de Galton-Watson indépendants, de même loi que le processus originel, et donc tels qu'existent des limites

$$M_\infty^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_n^{(i)}}{m^n}$$

indépendantes et toutes de même loi que M_∞. On a alors $M_\infty = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{Y_1} M_\infty^{(i)}$, et donc

$$p_m = \mathbb{P}[M_\infty = 0] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[M_\infty = 0|Y_1]] = \mathbb{E}[(p_m)^{Y_1}] = G(p_m)$$

car M_∞ est nulle si et seulement si tous les $M_\infty^{(i)}$ le sont. Par conséquent, $p_m = p_e = t$ est de nouveau l'unique point fixe de G dans $[0,1)$.

Introduction aux martingales

Département de Mathématiques et Informatique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila