Notes de cours

Introduction aux martingales

UEM1.1

MASTER

Version de Janvier 2022

2022

GHEZAL AHMED
Département de Mathématiques-Informatique
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Introduction aux Martingales

Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des sciences et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Master de Mathématiques

UEM1.1

Introduction aux martingales

Notes de cours

Année 2021-2022

Version de Janvier 2022

Cours; Ghezal Ahmed

Travaux Dirigés: Ghezal Ahmed

على
بركة الله

Martingales

1. Introduction

Définition 1. *Sous le nom de* processus aléatoire *ou* processus stochastique *on entend un modèle permettant d'étudier un phénomène aléatoire évoluant au cours du temps. Pour le décrire, on se donne :*
1) un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *;*
2) un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$*, où* E *est appelé* espace des états *du processus ;*
3) une famille $(X_t)_{t\in T}$ *de variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et à valeurs dans* E*.*
L'ensemble T *des indices* t *est l'*espace des temps.
Etant donné $\omega \in \Omega$*, on appelle* trajectoire du processus, *l'application* $t \mapsto X_t(\omega)$.
Pour $\omega \in \Omega$ *et* $t \in T$*, la quantité* $X_t(\omega)$ *est appelée* état du processus à l'instant t.

Lorsque T est discret on représente une trajectoire par une suite de points dans le plan.

On distingue plusieurs type de processus :
- les *processus à temps discret* et les *processus à temps continu* si $T \subset \mathbb{N}$ et respectivement si $T = [0, 1]$ ou $\mathbb{R}$;
- les processus à *espace d'états fini*, à *espace d'états dénombrable* ou à *espace d'états continu*, si E est fini, dénombrable ou respectivement continu.

Dans la suite sauf exception on ne considérera que des processus à temps discret c'est-à-dire une suite $X_0, X_1, X_2, \ldots$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$. Si E est fini ou dénombrable ces variables aléatoires sont forcément discrètes.

Définition 2. *Une* filtration *de* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est une suite croissante* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{A}$*. On dit alors que* $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ *est un* espace probabilisé filtré.

On définit souvent pour un filtration la tribu $\mathcal{F}_{-1}$ par $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Définition 3. *Un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* adapté *à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* X_n *est mesurable par rapport à la tribu* $\mathcal{F}_n$*.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On définit* $\mathcal{F}_n^X$ *comme étant la plus petite tribu rendant les variables aléatoires* $X_0, \ldots, X_n$ *mesurables :*

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n).$$

Alors $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une filtration appelée* filtration canonique *du processus aléatoire* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

D'après la définition, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *adapté* à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors X_n mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_m$ pour $m \geq n$.

La filtration canonique est par construction la plus petite filtration qui rende le processus adapté.

Donnons deux exemples de processus, que nous étudierons plus en détails.

Un processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que chaque X_n est intégrable et

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \text{ p.s.}$$

est appelé une *martingale*.

Un processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E,\mathcal{B})$ est une *chaîne de Markov* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $B \in \mathcal{B}$ on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_0,\ldots,X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n).$$
Cela signifie que si l'on connaît la position X_n du processus à l'instant n et si on veut prédire sa position X_{n+1}, la connaissance de ce qui c'est passé avant l'instant n n'apporte aucun renseignement utile.

2. Définition des martingales

On se fixe, pour toute la suite, un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{A},(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\mathbb{P})$.

Définition 4. *Un processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ est une* martingale *par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si :*
(1) $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ *(ie X_n est intégrable) ;*
(2) $(X_n)_{n\geq 0}$ *est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$;*
(3) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ *p.s..*

Lorsqu'on ne précise pas la filtration, on suppose que l'on a pris la filtration canonique ou naturelle. On dira que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport au processus $(Y_n)_{n\geq 0}$, si on a choisi $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0,\ldots,Y_n)$. On peut remarquer que, par définition de l'espérance conditionnelle la dernière propriété est équivalente à
$$\forall A \in \mathcal{F}_n, \quad \mathbb{E}[1_A X_{n+1}] = \mathbb{E}[1_A X_n],$$
ou encore à
$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] = 0.$$

Exemples

• Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration et si X est une variable aléatoire intégrable, alors $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ définit une martingale. C'est la *martingale de Doob*.

• Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est un processus adapté intégrable, alors $S_n = X_0 + \cdots + X_n$ définit une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$. En particulier si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées telles que $X_0 = 0$ alors $S_n = X_0+\cdots+X_n$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$.

Donnons deux premières propriétés simples mais importantes des martingales.

Proposition 5. *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale alors $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$. On dit qu'une martingale est à espérance mathématique constante.*

Démonstration. D'après la propriété des martingales on a
$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}(X_{n+1})$$
d'où par récurrence on obtient le résultat. □

Proposition 6. *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale alors pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$ on a*
$$\mathbb{E}[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n$$

Une manière équivalente de donner ce résultat est de dire que pour $m < n$, $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$.

Démonstration. On sait déjà que le propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Procédons par récurrence sur $k \geq 1$. D'après la propriété des martingales, et les propriétés de l'espérance conditionnelle on a
$$\mathbb{E}[X_{n+k+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+k+1}|\mathcal{F}_{n+k}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n$$
la dernière égalité s'obtenant avec l'hypothèse de récurrence. D'où, on obtient le résultat. □

3. Surmartingale et sous-martingale

Définition 7. *Un processus stochastique* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une* surmartingale *(respectivement une* sous-martingale*) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *si :*
(1) *si* $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ *(ie* X_n *est intégrable) ;*
(2) *si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *;*
(3) *si* $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$ *p.s. (resp.* $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ *p.s.).*

Il est évident que (X_n) est une surmartingale si et seulement si $(-X_n)$ est une sous-martingale. De plus (X_n) est une martingale si et seulement si c'est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

Exemples

Considérons la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ définie par : $S_0 = X_0 = a$ et pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} X_j$$

où les X_j $(j \geq 1)$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ avec $0 < p < 1$. Il est facile de voir que l'on définit ainsi une martingale, respectivement une surmartingale ou une sous-martingale, si $p = 1/2$, respectivement si $p < 1/2$ ou si $p > 1/2$. Cette marche peut modéliser la fortune d'un joueur qui joue à pile ou face et qui, à chaque lancer gagne ou perd un euro.

Donnons maintenant des exemples de constructions de surmartingales et sous-martingales.

Proposition 8. *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale (resp. une sous-martingale). Si* φ *est une fonction convexe (resp. convexe croissante) telle que* $\varphi(X_n)$ *soit intégrable alors* $(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ *est une sous-martingale.*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale (resp. une surmartingale). Si* φ *est une fonction concave (resp. concave croissante) telle que* $\varphi(X_n)$ *soit intégrable alors* $(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ *est une surmartingale.*

Démonstration. Pour la première partie de la proposition, d'après l'inégalité de Jensen on a :

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])$$

ce dernier terme étant égal à $\varphi(X_n)$ si au départ on a une martingale, sinon il est supérieur ou égal à $\varphi(X_n)$ si on a une sous-martingale et une fonction croissante. La deuxième partie s'obtient à partir de la première par passage à l'opposé. □

Corollaire 9.
(1) *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale. Alors* $(|X_n|)_{n\geq 0}$ *et* $(X_n^2)_{n\geq 0}$ *(si* X_n^2 *est intégrable) sont des sous-martingales.*
(2) *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une sous-martingale alors* $\left(X_n^+ = \sup(X_n, 0)\right)_{n\geq 0}$ *est une sous-martingale.*

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés qui sont identiques à celles des martingales. Nous ne démontrerons pas ces résultats, il suffira d'adapter les démonstration données dans le paragraphe des martingales.

Proposition 10. *Si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une surmartingale (resp. une sous-martingale) alors :*

$$(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 0} \text{ est une suite décroissante (resp. croissante) ;}$$

$$\forall n \geq 0,\ \forall k \geq 0,\ \mathbb{E}[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \text{ (resp. } \geq \text{)} \quad \text{ou encore} \quad \forall m \geq n,\ \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \leq X_m \text{ (resp. } \geq \text{)}$$