Notes de cours

Introduction à l'espérance conditionnelle

UEM1.1

MASTER

Version de Janvier 2022

2022

GHEZAL AHMED

Département de Mathématiques-Informatique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Introduction à l'espérance conditionnelle

Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des sciences et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Master de Mathématiques

UEM1.1

Introduction à l'espérance conditionnelle

Notes de cours

Année 2021-2022

Version de Janvier 2022

Cours; Ghezal Ahmed

Travaux Dirigés: Ghezal Ahmed

على
بركة الله

Chapter 1

Probabilité et espérance conditionnelles

1.1 Probabilité conditionnelle

Rappelons que nous comprenons la probabilité d'un évenement $A \subseteq \Omega$ comme une mesure de l'espérance que nous avons que c'est l'évènement A qui se réalisera et non son contraire A^c, c'est-à-dire une mesure de l'espérance que nous avons que l'état du monde ω^* où l'on se trouve est tel que $\omega^* \in A$. Imaginons à présent que nous souhaitons déterminer comment réévaluer cette espérance si nous considérons comme acquis que $\omega^* \in B$ (soit qu'on a une information qui nous assure de cela, soit qu'on souhaite simplement traiter séparément les deux cas $\omega^* \in B$ et $\omega^* \notin B$). On appelle cette nouvelle probabilité la probabilité de A sachant B, et on la note $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A \mid B)$). Soulignons que $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité sur (tout) Ω, simplement veut-on au-moins que $\mathbb{P}_B(A) = 0$ si $A \subseteq B^c$ (puisque si $\omega^* \in B$, on est certain que $\omega^* \notin A$); on veut aussi que $\mathbb{P}_B(B) = 1$ (puisqu'on envisage ici que le cas où $\omega^* \in B$). L'idée est alors de poser $\mathbb{P}_B(A) = c\mathbb{P}(A \cap B)$ ce qui assurera facilement que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, et comme $\mathbb{P}_B(B) = 1$, nous voyons que $c = 1/\mathbb{P}(B)$; bien-entendu ceci impose que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Le fait qu'un évènement B soit de probabilité nulle ou non étant souvent capitale, on dit qu'un évènement est négligeable si et seulement si $\mathbb{P}(B) = 0$. D'où finalement la définition

Definition 1.1.1. *Soit B un évenement non-négligeable de $(\Omega, \mathscr{B})$. On appelle probabilité conditionnelle sachant B la fonction $\mathbb{P}_B : \mathscr{B} \longrightarrow [0,1]$ définie, pour tout évènement $A \in \mathscr{B}$, par $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$*

Proposition 1.1.2. *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{B})$, et si $B \in \mathscr{B}$ n'est pas négligeable, alors $\mathbb{P}_B$ est également une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{B})$.*

Exercice 1.1.3. *Montrer la proposition 3.1 et vérifier que $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B\right) / \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_B\right)$.*

On dit qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i=1..n}$ forme une système complet d'évènements (s.c.é) si et seulement si [1]$\Omega = \bigcup_{i=1..n} A_i$, c'est-à-dire que chaque $\omega \in \Omega$ appartient à un A_i et un seul. Dans ce cas, pour tout évènement $B \in \mathscr{B}$ on a $B = \bigcup_{i=1..n} (B \cap A_i)$ et donc $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(B\cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{P}\left(A_i\right)$, d'où la formule de la probabilité totale

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \mid A_i\right) \mathbb{P}\left(A_i\right) \tag{1.1}$$

Imaginons connues les probabilité $\mathbb{P}\left(B \mid A_i\right)$ et $\mathbb{P}\left(A_i\right)$ pour tout $i = 1..n$. La formule de Bayes [2] suivante permet d'en déduire les $\mathbb{P}\left(A_i \mid B\right)$.

Theorem 1.1.4. *(formule de Bayes) Soit* $(A_i)_{i=1..n}$ *un s.c.é. de* $(\Omega, \mathscr{B})$*. Alors, pour tout évènement* B *non-négligeable, et tout* $j = 1..n$*, on a*

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right) \mathbb{P}\left(A_j\right)}{\mathbb{P}(B)} \left(= \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right) \mathbb{P}\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \mid A_i\right) \mathbb{P}\left(A_i\right)} \right).$$

Preuve 1.1.5. *Elle se réduit à l'application de la définition de* $\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right)$ *et de* $\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right)$ *:*

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_j \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(B \cap A_j\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right) \mathbb{P}\left(A_j\right)}{\mathbb{P}(B)},$$

et on termine par la formule (1.1).

1.2 Lois conditionnelles

Nous avons souvent besoin de calculer des probabilités ou des espérances lorsque des informations partielles sont disponibles. Dans ce cas, les grandeurs recherchées sont des probabilités ou des espérances conditionnelles. De plus, il peut s'avérer extrêmement utile pour faire des calculs en probabilité de conditionner selon une variable aléatoire appropriée.

1.2.1 Cas discret

Soient X et Y deux variables à valeurs dans IN. On se souvient que, pour toute paire d'événements A et B, la probabilité de A sachant B réalisé est

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

pourvu que $\mathrm{P}(B) > 0$. Il est naturel de définir la loi de probabilité conditionnelle de la variable X sachant $Y = l$ par

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad p_X^{Y=l}(k) &= \mathrm{P}(X = k \mid Y = l) \\ &= \frac{p(k,l)}{p_Y(l)} \quad \text{si } p_Y(l) > 0. \end{aligned}$$

Exemple 4.3.1 Soient X et Y deux variables indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors, la loi conditionnelle de la variable X sachant $X+ Y = n$ est la loi binomiale de paramètres n et $\lambda/(\lambda + \mu)$. Solution. Cette loi s'obtient ainsi

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \ldots n, \quad \mathrm{P}(X = k \mid X + Y = n) &= \frac{\mathrm{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathrm{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = n - k)}{\mathrm{P}(X + Y = n)} \end{aligned}$$

La somme de deux variables de Poisson indépendantes est encore une variable de Poisson dont le paramètre est égal à la somme des paramètres. L'expression précédente devient donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = k \mid X + Y = n) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda + \mu)^n} \\ &= C_n^k \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^k \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

1.3 Variables à densité

Definition 1.3.1. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe f. On définit la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ lorsque $f_Y(y) > 0$ par la relation*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X^{Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Exemple 1.3.2. *Soit D le domaine défini par*

$$D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

et (X, Y) un couple de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2 - x - y) & si\ (x,y) \in D \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

On cherche la loi conditionnelle de la variable X, sachant $Y = y, 0 < y < 1$.

Solution 1.3.3. . *On a, pour tout* $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} f_X^{Y=y}(x) &= \frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y)dx} \\ &= \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}. \end{aligned}$$