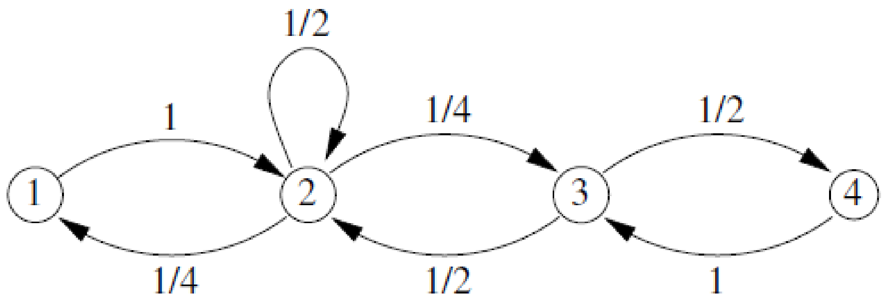
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des science et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Année 2021 – 2022
Introduction aux Chaines de Markov
Master 1 Maths A/F

*Série* de *TD* n°03

**Exercice 1.10.11** *On considère la chaîne de Markov suivante*




.

1. *Donner la matrice de transition* $\mathbb{P}$ *de la chaîne de Markov.*
2. *La chaîne de Markov est-elle irréductible ?*
3. *Déterminer la distribution stationnaire de la chaîne de Markov.*
4. *La chaîne de Markov est-elle réversible ?*

**Exercice 1.10.12** *On dispose dans une maison individuelle de deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état* 1 *si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état* 2 *si les deux systèmes fonctionnent.*

*Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité* $\dfrac{1}{2}$ *et si on est dans l' état* 2 *on passe le lendemain a l'état* 1 *avec probabilité* $\frac{3}{4}$.

*Soit* $S_n$ *l'état du système au jour* $n$. *On admet que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov homogène.*

1. *Déterminer sa matrice de transition et son graphe.*
2. *Soit* $u_n = P(S_n = 1)$. *Déterminer une relation de récurrence entre* $u_n$ *et* $u_{n+1}$ *et en déduire l'expression de* $u_n$ *en fonction de* $u_0$ *pour tout* $n$ *dans* $\mathbb{N}$.
3. *Sachant qu'on est dans l'état* 1 *un dimanche, trouver la probabilité d'être a nouveau dans le même état le dimanche suivant.*

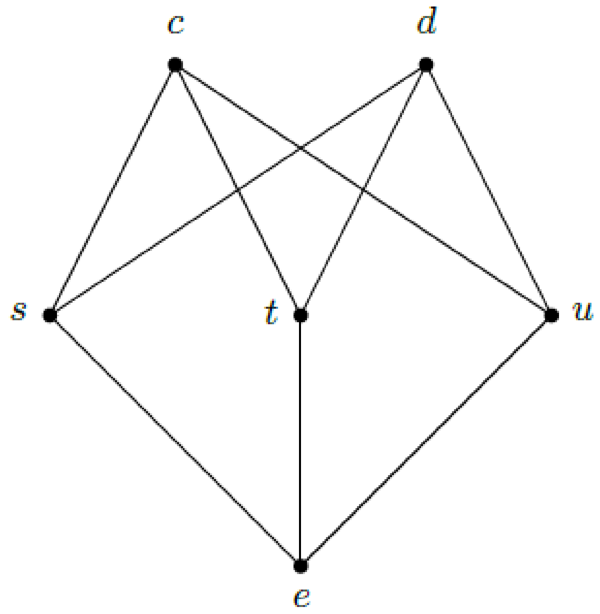
*4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état* $1$ *avec probabilité* $\dfrac{3}{5}$*, alors il en est de même pour tous les jours suivants. Donner la probabilité invariante de* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

**Exercice 1.10.13** *Soit* $(S_n)$ *la chaîne de Markov réductible sur l'espace d'états* $\mathbb{S} = \{1; 2; 3; 4\}$ *définie par la matrice de transition* $\mathbb{P}$*,*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Justifier qu'on peut s'attendre au fait que* $\mathbb{P}$ *ait plus d'une distribution invariante.*
2. *On note* $\left(S_n^{(1,3)}\right)_n$ *la chaîne de Markov* $(S_n)$ *restreinte aux états* $1$ *et* $3$*. Justifier que cette chaîne de Markov admet une unique distribution invariante et la calculer.*
3. *On note* $\left(S_n^{(2,4)}\right)_n$ *la chaîne de Markov* $(S_n)$ *restreinte aux états* $2$ *et* $4$*. Justifier que cette chaîne de Markov admet une unique distribution invariante et la calculer.*
4. *Déduire des deux questions précédentes deux distributions invariantes pour* $\mathbb{P}$*. On notera* $\underline{\Pi}$ *et* $\underline{\Lambda}$ *ces deux distributions.*
5. *Soit* $\rho \in [0; 1]$*. Montrer que* $\rho\underline{\Pi} + (1-\rho)\,\underline{\Lambda}$ *est une distribution invariante pour* $\mathbb{P}$*. En déduire que* $\mathbb{P}$ *admet une infinité de distributions invariantes.*

**Exercice 1.10.14** *On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :*




*qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états* $\{e; s; t; u; c; d\}$.

*Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?*

Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des science et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Année 2021 – 2022
Introduction aux Chaines de Markov
Master 1 Maths A/F

*Solution* de *Série* de *TD* n°03

**Solution 1.10.11** 1. *La matrice de transition* $\mathbb{P}$ *de la chaîne de Markov est*

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *On peut passer de tout état à tout autre donc la matrice* $\mathbb{P}$ *est irréductible.*

3. *Comme la chaîne de Markov sur l'ensemble fini et l'irréductibilité de* $\mathbb{P}$ *entraîne l'existence d'une unique loi stationnaire* $\underline{\Pi}:=(\pi(1),...,\pi(4))'$, *on doit résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} \underline{\Pi}'=\underline{\Pi}'\mathbb{P} \\ \underline{\Pi}'\underline{1}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi(1)=\frac{1}{4}\pi(2) \\ \pi(2)=\pi(1)+\frac{1}{2}\pi(2)+\frac{1}{2}\pi(3) \\ \pi(3)=\frac{1}{4}\pi(2)+\pi(4) \\ \pi(4)=\frac{1}{2}\pi(3) \\ \pi(1)+\pi(2)+\pi(3)+\pi(4)=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \pi(1)=\pi(4)=\frac{1}{2}\pi(3)=\frac{1}{4}\pi(2) \\ \pi(1)+\pi(2)+\pi(3)+\pi(4)=1 \end{cases},$$

*Après quelques calculs, on obtient :* $\underline{\Pi}=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)'$.

4. *On a :*

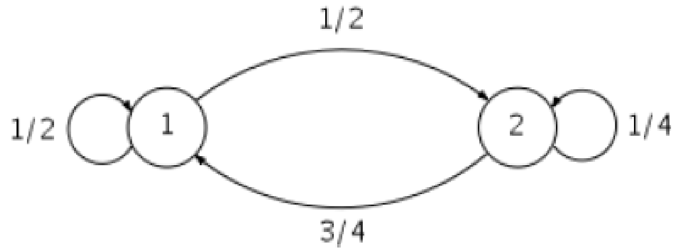
$$\pi(i)\,p_{ij}=\pi(j)\,p_{ji},\forall i,j\in\{1;2;3;4\},$$

*donc la chaîne de Markov est réversible.*

**Solution 1.10.12** 1. *On a la matrice de transition :*

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

*Le graphe associé est :*




.

2. *La chaîne de Markov prend ses valeurs dans* $\{1;2\}$, *donc*

$$\begin{aligned}\forall n, u_{n+1} &= P(S_{n+1}=1) = P(S_{n+1}=1, S_n=1) + P(S_{n+1}=1, S_n=2)\\ &= P(S_{n+1}=1 | S_n=1)\, P(S_n=1) + P(S_{n+1}=1 | S_n=2)\, P(S_n=2)\\ &= p_{11}u_n + p_{21}(1-u_n)\\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}u_n,\end{aligned}$$

*le point fixe :* $a = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}a \Longleftrightarrow a = \frac{3}{5}$, *donc*

$$\begin{aligned}\forall n, u_n - \frac{3}{5} &= -\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{3}{5}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(u_0 - \frac{3}{5}\right),\end{aligned}$$

*d'où* $\forall n, u_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(u_0 - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}$.

3. *On veut calculer* $P(S_{n+7}=1 | S_n=1)$. *Par la propriété de Markov ceci est égal à* $P(S_7=1 | S_0=1) = u_7$ *lorsque l'on prend* $u_0 = 1$. *On obtient :*

$$P(S_{n+7}=1 | S_n=1) = \left(-\frac{1}{4}\right)^8\left(1 - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}.$$

4. *La relation de récurrence obtenue à la question 2 nous donne* $u_n = \frac{3}{5} \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{3}{5}$. *On en déduit immédiatement que la loi invariante* $\underline{\Pi}' = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

**Solution 1.10.13** 1. *Comme on est a espace d'états fini,* $\mathbb{P}$ *admet au moins une distribution invariante. En revanche,* $\mathbb{P}$ *n'est pas irréductible, donc on peut s'attendre a ce qu'il y ait plus d'une distribution invariante pour* $\mathbb{P}$.

2. *La chaîne de Markov* $\left(S_n^{(1,3)}\right)$ *a pour matrice de transition, la matrice* $\mathbb{P}_{(1,3)}$ *définie par*

$$\mathbb{P}_{(1,3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*Cette matrice de transition est irréductible, donc la chaîne de Markov* $\left(S_n^{(1,3)}\right)$ *admet une unique distribution invariante* $\widetilde{\underline{\Pi}}$*. Un calcul rapide montre que cette distribution est donnée par* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$.

3. *La chaîne de Markov* $\left(S_n^{(2,4)}\right)$ *a pour matrice de transition, la matrice* $\mathbb{P}_{(2,4)}$ *définie par*

$$\mathbb{P}_{(2,4)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Cette matrice de transition est irréductible, donc la chaîne de Markov* $\left(S_n^{(2;4)}\right)$ *admet une unique distribution invariante* $\widetilde{\underline{\Lambda}}$*. Un calcul rapide montre que cette distribution est donnée par* $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)'$.

4. *On en déduit que les distributions* $\underline{\Pi}' = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ *et* $\underline{\Lambda}' = \left(0, \frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7}\right)$ *sont invariantes pour* $\mathbb{P}$.

5. *Soit* $\rho \in [0;1]$*. Notons* $\underline{\Gamma}_\rho = \rho\underline{\Pi} + (1-\rho)\,\underline{\Lambda}$*. Alors comme* $\underline{\Pi}$ *et* $\underline{\Lambda}$ *sont invariantes par* $\mathbb{P}$*, on a* $\underline{\Pi}' = \underline{\Pi}'\mathbb{P}$ *et* $\underline{\Lambda}' = \underline{\Lambda}'\mathbb{P}$*, donc*

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_\rho'\mathbb{P} &= \rho\underline{\Pi}'\mathbb{P} + (1-\rho)\,\underline{\Lambda}'\mathbb{P} \\ &= \rho\underline{\Pi}' + (1-\rho)\,\underline{\Lambda}' \\ &= \underline{\Gamma}_\rho', \end{aligned}$$

*ce qui montre que* $\underline{\Gamma}_\rho$ *est invariante par* $\mathbb{P}$*. Toutes les mesures* $\underline{\Gamma}_\rho$ *étant invariantes par* $\mathbb{P}$*, on déduit que* $\mathbb{P}$ *admet une infinité de distributions invariantes.*

**Solution 1.10.14** *Oui, la chaîne de Markov est irréductible, puisque chaque état mène à chaque autre pour cette chaîne de Markov. Comme l'espace d'états est fini, la chaîne a au moins un état récurrent, et comme la chaîne est irréductible, donc tous les états sont récurrents. i.e., la chaîne de Markov est récurrente.*