Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila — Année 2021 – 2022

Institut des science et de la technologie — Introduction aux Chaines de Markov

Département de Mathématique et Informatique — Master 1 Maths A/F

Série de *TD* n°02

Exercice 1.10.6 *Considérons une chaîne de Markov définie sur un espace* $\mathbb{S} = \{0; 1; ...; 9\}$ *formé de* 10 *états, dont la matrice de transition est :*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Tracer son graphe.*
2. *Déterminer la (ou les) classe(s) de la chaîne et leur(s) période(s).*

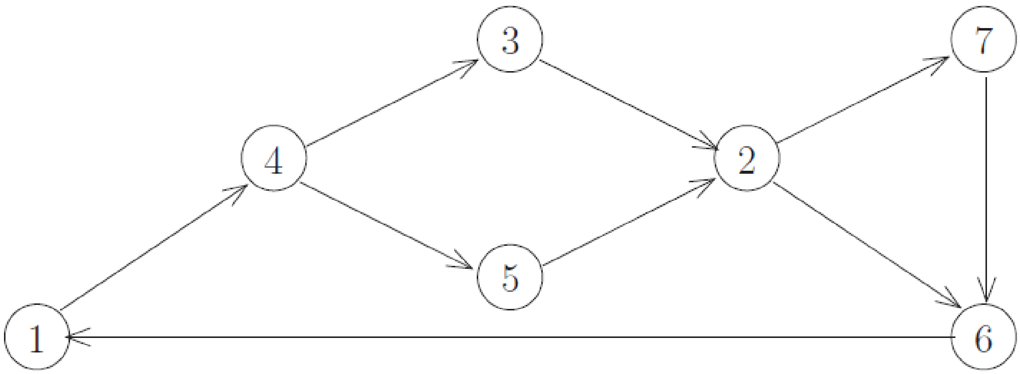
Exercice 1.10.7 *Considérons une matrice des probabilités de transition d'une chaîne de Markov avec espace d'états* $\mathbb{S} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ *;*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Tracer le graphe de transition correspondant à la chaîne de Markov.*
2. *Donner la (ou les) classe(s) de communication de la chaîne de Markov.*

3. *Soit* $\underline{\Pi} = (8a; b; 18a; 12a; 27a)$ *le vecteur de la distribution stationnaire pour la matrice* $\mathbb{P}$*, déterminer les valeurs de* a *et* b*.*

Exercice 1.10.8 *Est-ce que le graphe de transition de la figure ci-dessous est irréductible ? Donner sa période.*



Exercice 1.10.9 *Soit* $\mathbb{P}$ *une matrice de transition d'une chaîne de Markov à espace d'états* $\mathbb{S} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ *;*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. *Donner le graphe de transition de* $\mathbb{P}$*.*
2. *La chaîne est-elle irréductible ? apériodique ?*
3. *Loi(s) stationnaire(s) ?*

Exercice 1.10.10 *On considère une chaîne de Markov* $(S_n)_{n\geq 0}$ *sur* $\{1; ...; 7\}$ *de matrice de transition* $\mathbb{P}$

donnée par

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

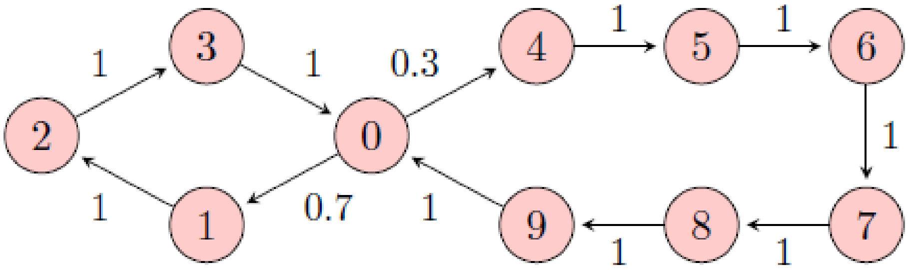
1. *Dessiner le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états.*
2. *La chaîne est-elle irréductible ?*
3. *Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires.*
4. *Calculer* $p_{36}^{(2)}$ *et* $p_{17}^{(2)}$.

Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des science et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Année 2021 – 2022
Introduction aux Chaines de Markov
Master 1 Maths A/F

Solution de *Série* de *TD* n°02

Solution 1.10.6 1. *Traçons son graphe :*



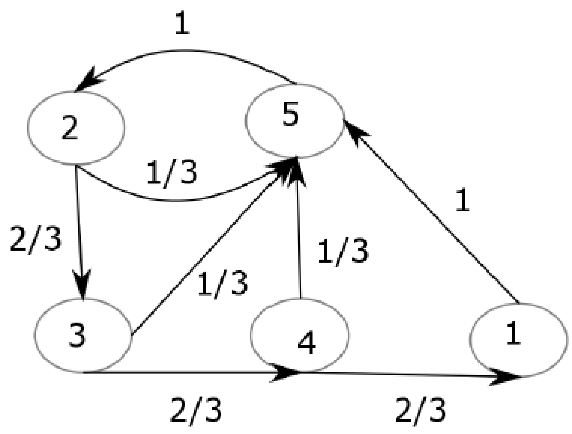
2. *Il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, tous les états communiquent entre eux, donc la chaîne est dite irréductible.*

   Afin de déterminer la période de cette chaîne de Markov, il suffit de déterminer celle d'un de ses états ; prenons $i = 0$. On a :

$$\begin{aligned} d_0 &= PGCD\left\{n \geq 1, p_{00}^{(n)} > 0\right\} \\ &= PGCD\{4; 7; ...\} \ \ (car\ p_{00}^{(4)} = 0.7\ \ et\ p_{00}^{(7)} = 0.3) \\ &= 1, \end{aligned}$$

   donc la chaîne est apériodique.

Solution 1.10.7 *1. Le graphe de transition :*



.

2. *La chaîne possède une seule classe, ce qui implique qu'elle est irréductible.*

3. *Pour déterminer les valeurs de a et b ; on doit résoudre le système suivant :*

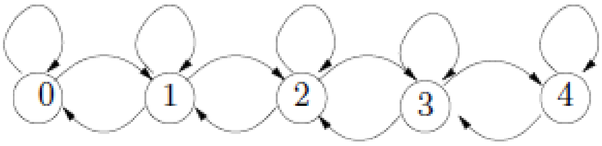
$$\begin{cases} \underline{\Pi}' = \underline{\Pi}'\mathbb{P} \\ \underline{\Pi}'\underline{1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi(1) = \frac{2}{3}\pi(4) \\ \pi(2) = \pi(5) \\ \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(2) \\ \pi(4) = \frac{2}{3}\pi(3) \\ \pi(5) = \pi(1) + \frac{1}{3}\pi(2) + \frac{1}{3}\pi(3) + \frac{1}{3}\pi(4) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) + \pi(5) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \pi(1) = \frac{2}{3}\pi(4) \\ \pi(2) = \pi(5) \\ \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(2) \\ \pi(4) = \frac{2}{3}\pi(3) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) + \pi(5) = 1 \end{cases},$$

de l'équation 2 ;on a $b = 27a$,*donc* $8a + 27a + 18a + 12a + 27a = 1$, *alors* $a = \dfrac{1}{92}$ *et* $b = \dfrac{27}{92}$.

Solution 1.10.8 *Le graphe possède une seule classe de communication, ce qui implique qu'il est irréductible, et* $d_1 = PGCD\left\{n \geq 1, p_{11}^{(n)} > 0\right\} = PGCD\{5; 6; ...\} = 1$.

Solution 1.10.9 *1. Le graphe de transition est*



.

2. On peut passer de tout état à tout autre donc la matrice $\mathbb{P}$ est irréductible. Par ailleurs on peut boucler sur chaque état, donc elle est apériodique.

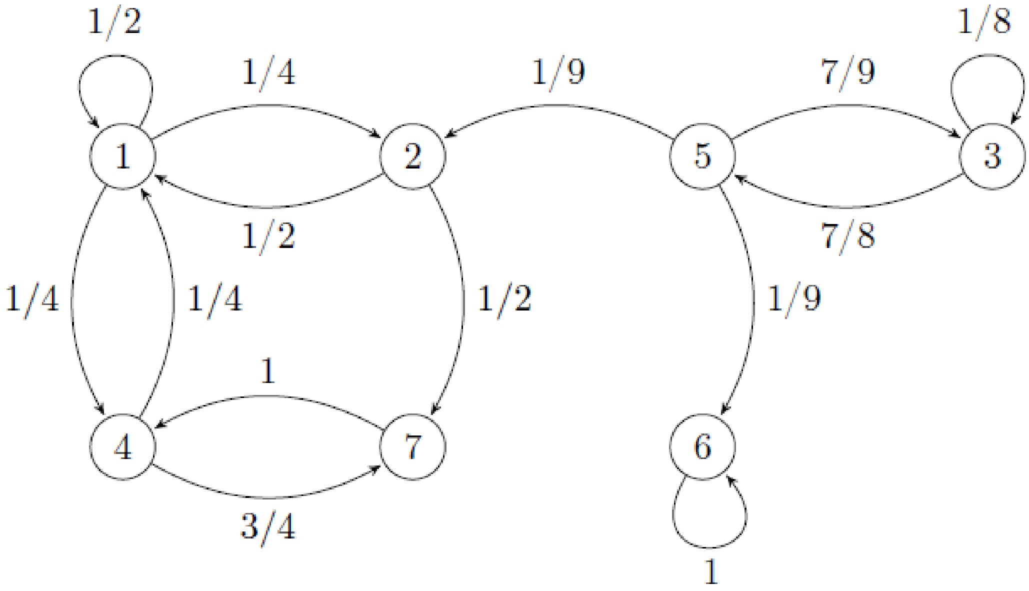
3. L'irréductibilité de $\mathbb{P}$ entraîne l'existence d'une unique loi stationnaire $\underline{\Pi} := (\pi(0), ..., \pi(4))'$, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{\Pi}' = \underline{\Pi}'\mathbb{P} \\ \underline{\Pi}'\underline{1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi(0) = \frac{1}{2}\pi(0) + \frac{1}{8}\pi(1) \\ \pi(1) = \frac{1}{2}\pi(0) + \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{4}\pi(2) \\ \pi(2) = \frac{3}{8}\pi(1) + \frac{1}{2}\pi(2) + \frac{3}{8}\pi(3) \\ \pi(3) = \frac{1}{4}\pi(2) + \frac{1}{2}\pi(3) + \frac{1}{2}\pi(4) \\ \pi(4) = \frac{1}{8}\pi(3) + \frac{1}{2}\pi(4) \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \pi(0) = \frac{1}{4}\pi(1) \\ \pi(1) = \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(2) \\ \pi(3) = \frac{1}{2}\pi(2) + \pi(4) \\ \pi(4) = \frac{1}{4}\pi(3) \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1 \end{cases},$$

Après quelques calculs, on obtient : $\underline{\Pi} = \left(\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}\right)'$.

Solution 1.10.10 *1. Le graphe est :*



2. *Non, sinon elle n'admettrait qu'une seule classe de communication.*

3. *On déduit du graphe qu'il y a deux classes récurrentes :* $\{1; 2; 4; 7\}$ *et* $\{6\}$*, et une classe transiente :* $\{3; 5\}$.

4. *Par la formule* $p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{7} p_{ik}p_{kj}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} p_{36}^{(2)} &= p_{35}p_{56} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{72}, \\ p_{17}^{(2)} &= p_{12}p_{27} + p_{14}p_{47} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$