Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des science et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Année 2021 – 2022
Introduction aux Chaines de Markov
Master 1 Maths A/F

Série de *TD* n°01

Exercice 1.10.1 *On considère l'espace* $\mathbb{S} = \{1; 2\}$*, et une matrice de transition* $\mathbb{P}$*,*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions sur a, b, c, d *la matrice* $\mathbb{P}$ *est-elle une matrice stochastique ? On supposera dans tout ce qui suit que ces conditions sont réunies. Réécrire dans ce cas* $\mathbb{P}$ *en fonction seulement des paramètres a et d. Dessiner le graphe associé à cette matrice (qui peut dépendre des valeurs de a et d).*

Exercice 1.10.2 *On considère la chaîne de Markov à deux états,*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, 0 < \alpha, \beta < 1.$$

1. *Ecrire* $\mathbb{P}$ *sous la forme* $\mathbb{P} = QDQ^{-1}$*, où* D *est la matrice diagonale* $diag(1; 1-\alpha-\beta)$ *et* Q *une matrice inversible.*
2. *Pour tout* $n \geq 0$*, évaluer* $\mathbb{P}^{(n)}$*.*

Exercice 1.10.3 *On considère la chaîne de Markov* $(S_n)_{n\geq 0}$ *sur* $\mathbb{Z}$ *définie par* $S_0 = 0$ *et par les probabilités conditionnelles*

$$P(S_{n+1} = i+1 \,| S_n = i) = \frac{1}{2} = P(S_{n+1} = i-1 \,| S_n = i).$$

Déterminer la (ou les) classe(s) de cette chaîne de Markov, et sa période.

Exercice 1.10.4 *On considère la matrice de transition sur l'espace* $\mathbb{N}$ *donnée par*

$$p_{01} = 1, \forall k \geq 1, p_{kk+1} = p, p_{kk-1} = 1-p,$$

p *étant un paramètre réel dans* $[0; 1]$.

Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables i.i.d. de loi*

$$P(\xi_n = 1) = 1 - P(\xi_n = 1) = p.$$

On considère la suite aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$S_n = S_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{I}_{\{S_{j-1}=0\}} + \xi_j \mathbb{I}_{\{S_{j-1}>0\}} \right),$$

S_0 *étant indépendant de* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Montrer que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov de matrice de transition* $\mathbb{P}$ *sur l'espace* $\mathbb{N}$.

Exercice 1.10.5 *Montrer qu'une mesure réversible est invariante pour la matrice de transition* $\mathbb{P}$ *d'une chaîne de Markov sur un espace d'états fini ou dénombrable. La réciproque est-elle vraie ?*

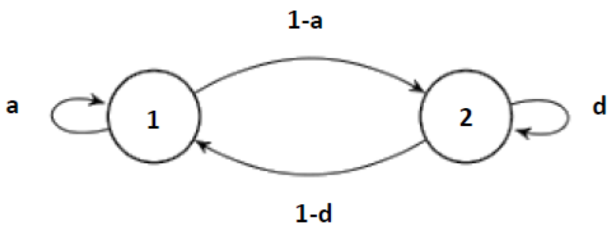
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila | Année 2021 − 2022
Institut des science et de la technologie | Introduction aux Chaines de Markov
Département de Mathématique et Informatique | Master 1 Maths A/F

Solution de *Série* de *TD* n°01

Solution 1.10.1 *Il faut* $a, b, c, d \geq 0$, $a + b = 1$ *et* $c + d = 1$. *Donc, la matrice se réécrire sous la forme*

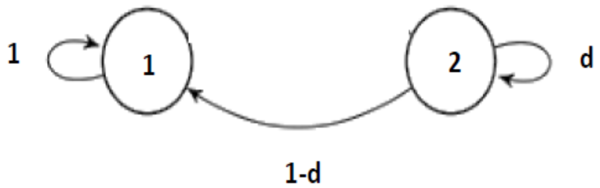
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-d & d \end{pmatrix}, \ 0 \leq a, d \leq 1.$$

Si $0 < a, d < 1$, *le graph est*



.

Si a *ou* $d \in \{0; 1\}$, *par exemple* $a = 1$ *et* $0 < d < 1$, *le graph est*



.

Solution 1.10.2 *1. En dehors de la valeur propre* 1, *la matrice* $\mathbb{P}$ *a la valeur propre* $\lambda \neq 1$ *solution de* $\det(\mathbb{P} - \lambda I_{(2)}) = 0$, *soit*

$$\lambda^2 - (2 - \alpha - \beta)\lambda + (1 - \alpha - \beta) = 0,$$

i.e., $\lambda = 1 - \alpha - \beta$, *auquel on peut associer le vecteur propre* $(\alpha, -\beta)'$, *d'où*

$$\mathbb{P} = QDQ^{-1}, Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *On a : Pour tout* $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n = QD^nQ^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(n)} &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n & \alpha(1-(1-\alpha-\beta)^n) \\ \beta(1-(1-\alpha-\beta)^n) & \alpha+\beta(1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(par exemple $p_{11}^{(n)} = \dfrac{\beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}$*).*

Solution 1.10.3 *On constate que tous les états communiquent entre eux : si on note* $\mathbb{P}$ *la matrice (infinie) de transition,* $p_{ii+1} > 0$, $p_{i+1i} > 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$ *donc* $i \leftrightsquigarrow i+1$, *et ainsi* $i \leftrightsquigarrow i+1 \leftrightsquigarrow i+2$, *par récurrence,* $i \leftrightsquigarrow j$ *pour tous entiers* $i \leq j$. *Donc, il n'y a qu'une classe,* $\mathbb{Z}$, *alors la chaîne de Markov est irréductible.*

Donc, il suffit de déterminer la période de 0,

$$d_0 = PGCD\left\{n \geq 1, p_{00}^{(n)} > 0\right\}.$$

L'ensemble $E = \left\{n \geq 1, p_{00}^{(n)} > 0\right\}$ *ne contient pas* 1 *puisque* $p_{00} = 0$. *En revanche,* $2 \in E$ *puisque* $p_{00}^{(2)} \geq p_{01}p_{10} > 0$, *donc* $E = \{2; 4; ...\}$, *alors* $d_0 = 2$.

Solution 1.10.4 *Notons que* $S_n = S_{n-1} + \mathbb{I}_{\{S_{n-1}=0\}} + \xi_n \mathbb{I}_{\{S_{n-1}>0\}} = f(S_{n-1}, \xi_n)$. *Puisque les v.a.* (ξ_n) *sont i.i.d., donc* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov.*

Si $S_{n-1} = 0$, *alors* $S_n = S_{n-1} + 1 = 1 \Longrightarrow p_{01} = 1$.

Si $S_{n-1} > 0$ *alors* $S_n = S_{n-1} + \xi_n = \begin{cases} S_{n-1}+1 \text{ avec probabilité } p \\ S_{n-1}-1 \text{ avec probabilité } 1-p \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p_{kk+1} = p \\ p_{kk-1} = 1-p \end{cases}, \forall k \geq 1.$

Solution 1.10.5 *Si* $\underline{\Pi}' := (\pi(1), \pi(2), ...)$ *est réversible alors* $\forall i, j \in \mathbb{S}$,

$$\pi(i)\, p_{ij} = \pi(j)\, p_{ji},$$

comme $\sum_{j\in\mathbb{S}} \pi(i)\, p_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{S}} \pi(j)\, p_{ji} = \pi(i), \forall i \in \mathbb{S}$, *donc* $\underline{\Pi}$ *est invariante pour* $\mathbb{P}$.

La réciproque est fausse ; par exemple : une chain de Markov irréductible de matrice de transition $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\underline{\Pi}' := \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *est invariante mais* $\pi(1)\, p_{12} = \frac{1}{3} \neq 0 = \pi(2)\, p_{21}$.