1.8 Périodicité

Il s'agit d'étudier dans quelles conditions le temps qui sépare deux retours au même état j est ou n'est pas multiple d'un temps minimum. On introduit pour ce faire la notion de période.

Définition 1.8.1 *Soit j un état de retour ; on appelle* ***période*** *de j, le $PGCD$ de tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels $p_{jj}^{(n)} > 0$. On note d_j la période de j, i.e.,*

$$d_j = PGCD \left\{ n \geq 1, p_{jj}^{(n)} > 0 \right\}.$$

Si $d_j > 1$, on dit que j est ***périodique*** *de période d_j ; si $d_j = 1$, on dit que j est* ***apériodique****. Si j est un état de non-retour, à savoir que, pour tout $n \geq 1$, on a $p_{jj}^{(n)} = 0$, on pose $d_j = \infty$, (par convention,$PGCD\left(\varnothing\right) = \infty$).*

Théorème 1.8.1 *Si i est périodique de période d finie et si $i \leftrightsquigarrow j$, $j \neq i$, alors j est aussi périodique de période d.*

Preuve. Si $i \leftrightsquigarrow j$, alors il existe deux entiers n et m tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$. Comme i est de période $d_i = d$, il existe aussi un entier $t \geq 1$ tel que $p_{ii}^{(t)} > 0$. Donc

$$p_{jj}^{(m+t+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(t)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

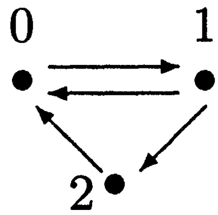
Comme $p_{ii}^{(t)} > 0 \Longrightarrow p_{ii}^{(2t)} > 0$, on a aussi : $p_{jj}^{(m+2t+n)} > 0$. Donc la période d_j de j divise à la fois $m+t+n$ et $m+2t+n$, alors aussi leur différence t, et en particulier la période d_i de i. De la même façon, on montre que d_i divise d_j. Ainsi $d_j = d_i = d$. ■

Remarque 1.8.1 *La propriété de périodicité est une propriété de classe : les états d'une classe sont ou bien tous périodiques de même période ou bien tous apériodiques.*

Remarque 1.8.2 *La chaîne de Markov est apériodique si tout état $i \in \mathbb{S}$ est apériodique.*

Remarque 1.8.3 *Un état i tel que $p_{ii} > 0$ est nécessairement apériodique.*

Exemple 1.8.1 *Considérons la chaîne de Markov, à trois états, dont le graphe associé est donné dans la figure ci-dessous, où toutes les flèches présentes correspondent à des probabilités de transition strictement positives.*



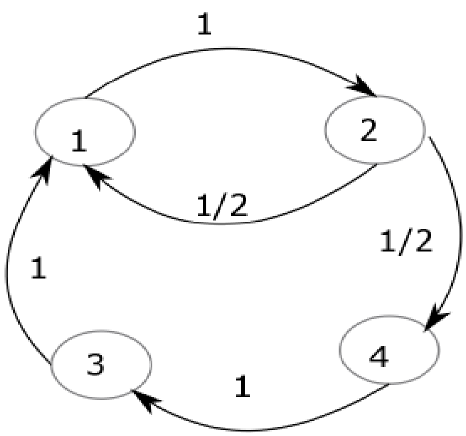
L'état 0 est de retour ; les lacets $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$ ont pour longueurs 2 et 3, respectivement ;

$$d_0 = PGCD\,\{2; 3; ...\} = 1,$$

donc l'état 0 est apériodique. Maintenant, la chaîne est irréductible. Les deux autres états 1 et 2 sont aussi apériodiques, ce que l'on peut aussi vérifier directement.

Exemple 1.8.2 *Dans la promenade sur $\mathbb{Z}$ décrite dans l'Exemple 1.3.4, tous les états sont périodiques, de période 2.*

Exemple 1.8.3 *Considérons la chaîne de Markov dont le graphe de transition est donné par :*



Nous avons

$$\begin{aligned}
d_1 &= PGCD\left\{n \geq 1, p_{11}^{(n)} > 0\right\} = PGCD\{2;4;6;8...\} = 2,\\
d_2 &= PGCD\left\{n \geq 1, p_{22}^{(n)} > 0\right\} = PGCD\{2;4;6;8...\} = 2,\\
d_3 &= PGCD\left\{n \geq 1, p_{33}^{(n)} > 0\right\} = PGCD\{4;6;8;10...\} = 2,\\
d_4 &= PGCD\left\{n \geq 1, p_{44}^{(n)} > 0\right\} = PGCD\{4;6;8;10...\} = 2.
\end{aligned}$$

Proposition 1.8.1 *Soit $\mathbb{P}$ une matrice stochastique irréductible, de période d. Alors, pour tous états $i, j \in \mathbb{S}$ il existe des entiers (dépendant de i, j) $m \geq 0$ et$n_0 \geq 0$ tels que*

$$p_{ij}^{(m+nd)} > 0, \ \textit{pour tout } n \geq n_0.$$

Preuve. Il suffit de prouver le théorème pour $i = j$. En effet, il existe m tel que $p_{ij}^{(m)} > 0$, parce que j est accessible depuis i, la chaîne étant irreductible, et donc, si pour un $n_0 \geq 0$ on a : $p_{jj}^{(nd)} > 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $p_{ij}^{(m+nd)} > p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(nd)} > 0$ pour tout $n \geq n_0$. ■

1.9 Ergodicité

Définition 1.9.1 *On dit qu'un état est **ergodique**, s'il est <u>récurrent</u> <u>positif</u> et <u>apériodique</u>.*

Théorème 1.9.1 *Les états d'une classe de communication qui contient au moins un état ergodique sont ergodiques.*

Remarque 1.9.1 *L'ergodicité est une propriété de classe, puisque c'est le cas pour la récurrence, la positivité et la périodicité. Une classe contenant un état ergodique est dite classe ergodique. Si l'ensemble des états est fini, si le processus est irréductible et si la seule classe dont il est formé est apériodique, alors cette classe est ergodique. On dit aussi que le processus est ergodique.*

Exemple 1.9.1 *Considérons la chaîne de Markov (S_n) dont l'espace des états est $\mathbb{S} = \{1;2;3;4;5\}$ de matrice de transition :*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La chaîne de Markov (S_n) *dans cet exemple possède une classe ergodique :* $\{1;3\}$ *car l'état* 1 *est récurrente positive et aussi apériodique* ($d_1 = 1$, $p_{11} > 0$).

Proposition 1.9.1 *Une distribution stationnaire est appelée distribution ergodique si* $\pi(i) > 0$, $\forall i \in \mathbb{S}$.