1.6 Classification des états

La classification des états d'une chaîne de Markov joue un rôle essentiel dans l'étude de son comportement à long terme.

Définition 1.6.1 *On dit que l'état j est* ***accessible*** *à partir de l'état i, ou est conséquent de l'état i, s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. On écrit : $i \rightsquigarrow j$.*

Sur le graphe, si $i \neq j$, $i \rightsquigarrow j$ s'il existe un chemin du sommet i vers le sommet j.

Propriété 1.6.1 *La relation d'accessibilité entre états est réflexive et transitive.*

Preuve. Comme $p_{ii}^{(0)} = 1$ pour tout état i, on a bien $i \rightsquigarrow i$. Ensuite, si $i \rightsquigarrow k$ et $k \rightsquigarrow j$, alors $\exists n, m \geq 0$, $p_{ik}^{(n)} > 0, p_{kj}^{(m)} > 0$. D'après la relation (2.1), on en tire :

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{s \in \mathbb{S}} p_{is}^{(n)} p_{sj}^{(m)} \geq p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} > 0.$$

D'où $i \rightsquigarrow j$. ■

Propriété 1.6.2 *Soient i, j deux états ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(I) *l'état j est accessible à partir de l'état i,*

(II) *le processus, partant de i, passe par j avec une probabilité strictement positive.*

Preuve. D'abord, (**I**) $\Longrightarrow$ (**II**) est évident. Montrons que $(\mathbf{I})^c \Longrightarrow (\mathbf{II})^c$. Sous l'hypothèse $(\mathbf{I})^c$, pour tout $n \geq 0$, on a : $p_{ij}^{(n)} = 0$. Soit A l'événement " le processus passe par j ". Alors

$$P\left(A \,|S_0 = i\right) = P\left(\bigcup_{j \in \mathbb{S}} \{S_n = j\} \,|S_0 = i\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{S}} P\left(S_n = j \,|S_0 = i\right) = \sum_{j \in \mathbb{S}} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

D'où la propriété $(\mathbf{II})^c$. ■

Définition 1.6.2 *On dit que deux états i et j **communiquent** et l'on écrit $i \leftrightsquigarrow j$, si on a à la fois : $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$.*

Propriété 1.6.3 *La relation de communication entre états est une relation d'équivalence.*

Preuve. Les propriétés de réflexivité et de transitivité déjà vérifiées pour la relation d'accessibilité restent naturellement encore valables pour la relation de communication. Enfin, cette dernière relation est symétrique par définition-même. ■

Remarque 1.6.1 *En raison du fait que, pour tout i, on a $p_{ii}^{(0)} = 1$, tout état communique avec lui-même.*

Définition 1.6.3 *Un état est appelé état de **retour**, s'il existe $n \geq 1$ tel que $p_{ii}^{(n)} > 0$.*

Il existe des états i tels que pour tout $n \geq 1$ (donc 0 exclu) on ait $p_{ii}^{(n)} = 0$. De tels états sont appelés états de non-retour.

Exemple 1.6.1 *Considérons la chaîne de Markov, telle que $\mathbb{S} = \{1; 2\}$ et $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2 est un état de non-retour, car $\forall n \geq 1$, $p_{22}^{(n)} = 0$ ($\forall n \geq 1, \mathbb{P}^n = \mathbb{P}$).*

Remarque 1.6.2 *Pour la relation de communication, l'ensemble $\mathbb{S}$ des états se partitionne en classes d'équivalence, disjointes et non vides, dites classes indécomposables. Si C_1 et C_2 sont deux classes distinctes, on peut éventuellement aller, disons, de C_1 à C_2, mais on ne peut alors retourner de C_2 à C_1. En revanche, tous les états d'une même classe communiquent.*

Définition 1.6.4 *Un état **absorbant**, si $p_{ii} = 1$, autrement $p_{ij} = 0, \forall i \neq j$.*

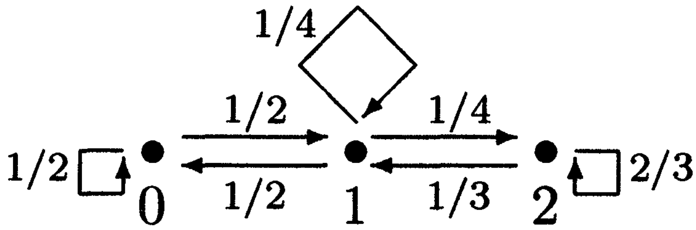
Dans l'exemple juste mentionné, l'état 1 est absorbant.

Définition 1.6.5 *S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entre eux, la chaîne est dite **irréductible**.*

Exemple 1.6.2 *Considérons la chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $\mathbb{S} = \{0; 1; 2\}$, la matrice de transition*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

et le graphe



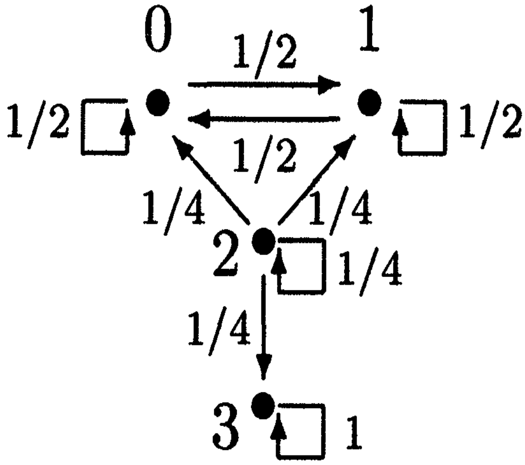
.

Cette chaîne de Markov est irréductible. Tous les états communiquent.

Exemple 1.6.3 *Considérons la chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est* $\mathbb{S} = \{0; 1; 2; 3\}$*, la matrice de transition*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le graphe



.

La chaîne comporte trois classes de communication $\{0; 1\}$*,* $\{2\}$ *et* $\{3\}$*. L'état* 3 *est absorbant. Cette chaîne est réductible.*

Théorème 1.6.1 *Toute chaîne de Markov finie admet au moins une distribution stationnaire, qui est unique si la chaîne est irréductible.*

Définition 1.6.6 *Un ensemble* $C \subset \mathbb{S}$ *d'états est dit fermé, si pour tout* $i \in C$ *et tout* $j \notin C$*, on a :* $p_{ij} = 0$.

Autrement dit, un ensemble C est fermé, si la chaîne de Markov quitte cette classe avec probabilité 0.

1.7 États récurrents et transients

Pour tout état j, désignons par T_j le temps d'arrêt de la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geq 0}$ dans l'état j à partir de l'instant 1. Autrement dit,

$$T_j = \inf\{n \geq 1, S_n = j\}.$$

Rappelons que cela signifie que pour tout $n \geq 0$, l'événement $\{T_j = n\}$, qui est égal à

$$\{S_1 \neq j, ..., S_{n-1} \neq j, S_n = j\}.$$

Définition 1.7.1 ***(Loi de probabilité conditionnelle du temps d'arrêt ou d'atteinte)***

Pour tous les états i, j et tout $n \geq 1$, on pose :

$$f_{ij}^{(n)} = P\left(T_j = n | \, S_0 = i\right).$$

Ainsi, $f_{ij}^{(n)}, n \geq 1$ est la probabilité pour que le processus, partant de l'état i, atteigne l'état j, à l'instant n. Pour tous les états i, j, on pose, par convention, $f_{ij}^{(0)} := 0$.

Théorème 1.7.1 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \tag{5.1}$$

Par convention, $p_{ij}^{(0)} := \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 autrement). L'identité (5.1) est encore valable pour $n = 0$ et $i \neq j$.

Preuve. Comme, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\{S_n = j\} &= \bigcup_{k=1}^{n} \{T_j = k\} \cap \{S_n = j\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{n-1} \{T_j = k, S_n = j\} \cup \{T_j = n, S_n = j\} \\
&= \bigcup_{k=1}^{n-1} \{T_j = k, S_n = j\} \cup \{T_j = n\},
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} P\left(S_n = j \middle| S_0 = i\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(T_j = k,\, S_n = j \middle| S_0 = i\right) + P\left(T_j = n \middle| S_0 = i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(S_n = j \middle| T_j = k, S_0 = i\right) P\left(T_j = k \middle| S_0 = i\right) + f_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P\left(S_n = j \middle| T_j = k, S_0 = i\right) = P\left(S_n = j \middle| T_j = k, S_k = j, S_0 = i\right) = p_{jj}^{(n-k)}.$$

Comme $P\left(S_n = j \middle| S_0 = i\right) = p_{ij}^{(n)}$ et $P\left(T_j = k \middle| S_0 = i\right) = f_{ij}^{(k)}$, il en résulte

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + f_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

■

Remarque 1.7.1 *L'identité* (5.1) *permet de déterminer les* $f_{ij}^{(n)}$ *par récurrence à partir des* $p_{ij}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)} &= p_{ij}^{(1)}, \\ f_{ij}^{(n)} &= p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, n \geq 2. \end{aligned}$$

Notation : Posons

$$f_{ij} := P\left(T_j < \infty \middle| S_0 = i\right) = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)}.$$

C'est la probabilité pour que le processus, partant de i, passe par j au moins une fois au cours du temps ; si $i = j$, le nombre f_{jj} est la probabilité pour que le processus, partant de j, retourne en j, au moins une fois au cours du temps.

Définition 1.7.2 *On dit que l'état j est **récurrent**, si $f_{jj} = 1$. On dit qu'il est **transient** ou **transitoire**, si $f_{jj} < 1$.*

Définition 1.7.3 *Un état $i \in \mathbb{S}$ est dit **transient** s'il n'est pas récurrent.*

Théorème 1.7.2 ***(Critères de récurrence)***

Un état j est récurrent ou transient selon que $\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} = \infty$ ou que $\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} < \infty$.

Proposition 1.7.1 *Tout état de non-retour est transient ; tout état absorbant est récurrent.*

Preuve. Pour un état j de non-retour, on a :

$$p_{jj}^{(n)} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

La série de terme général $p_{jj}^{(n)}$ est évidemment convergente , donc l'état est transient. Pour un état absorbant, tous les termes $p_{jj}^{(n)}$ de la série valent 1. La série est divergente et l'état j est récurrent. ■

Proposition 1.7.2 *La récurrence est une propriété de classe : si $i \leftrightsquigarrow j$ et si i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Il en est par conséquent de même pour la transience.*

Preuve. Comme $i \leftrightsquigarrow j$, on a $p_{ji}^{(t)} > 0$ et $p_{ij}^{(m)} > 0$ pour certains entiers t, m. De là,

$$\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(t+n+m)} \geq \sum_{n \geq 0} p_{ji}^{(t)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(t)} p_{ij}^{(m)} \sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

■

Remarque 1.7.2

1. *La chaîne de Markov est appelée récurrente, si tous ses états sont récurrents.*
2. *La chaîne de Markov est appelée transiente, si tous ses états sont transients.*
3. *Un état récurrent est accessible à partir de tous les états de sa classe.*
4. *Un état transitoire n'est pas accessible à partir d'un état récurrent.*
5. *Au moins un état récurrent est accessible à partir d'un état transitoire.*

Théorème 1.7.3

1. *(**Critère de positivité**) Soit i un état ;*
   - *si $\limsup_n p_{ii}^{(n)} > 0$, l'état i est positif,*
   - *si $\lim_n p_{ii}^{(n)} = 0$, l'état i est nul.*

Remarque 1.7.3 *Notons que si i est transient, on sait que $\lim_n p_{ii}^{(n)} = 0$. Donc tout état transient est nul.*

Théorème 1.7.4 *La propriété de positivité (de nullité) est une propriété de classe.*

Preuve. Ce théorème est une conséquence du Critère de positivité. En effet, si j est un état nul et si $j \leftrightsquigarrow i$ avec $i \neq j$, il existe des entiers t, m tels que pour tout $n \geq 0$, on ait

$$p_{ji}^{(t)} > 0,\ p_{ij}^{(m)} > 0 \text{ et } p_{jj}^{(t+n+m)} \geq p_{ji}^{(t)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \geq 0.$$

Alors $\lim_n p_{jj}^{(n)} = 0 \Longrightarrow \lim_n p_{ii}^{(n)} = 0$ et l'état i est nul aussi. ■

Théorème 1.7.5 *Pour une chaîne de Markov finie, il existe toujours au moins une distribution stationnaire. Mais une chaîne de Markov finie n'admet pas toujours une unique distribution stationnaire.*

Exemple 1.7.1 *Considérons la chaîne de Markov de matrice de transition suivante :*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cette chaîne de Markov admet une infinité de distributions stationnaires définies par :

$$\underline{\Pi} = (0, 1 - 2\delta, \delta, \delta)', 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}.$$

Remarque 1.7.4 *Une chaîne de Markov infinie n'admet pas toujours de distribution stationnaire.*

Exemple 1.7.2 *Considérons la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui à i associe $i+1$ avec probabilité* 1*, i.e., qui possède la matrice de transition*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

n'admet pas de loi stationnaire.

Théorème 1.7.6 *Une chaîne de Markov transiente infinie n'admet pas de distribution stationnaire.*

Théorème 1.7.7 ***(Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de distributions stationnaires)***

Si la chaîne de Markov est irréductible, elle possède une distribution stationnaire unique $\underline{\Pi}$, si et seulement si tous les états sont récurrents positifs.

Théorème 1.7.8 ***(Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de distributions stationnaires)***

Si la chaîne de Markov est quelconque, elle possède une distribution stationnaire $\underline{\Pi}$, si et seulement si la chaîne possède au moins une classe récurrente positive. Dans le cas de plusieurs classes récurrentes positives, il existe une distribution stationnaire pour chaque classe.

Remarque 1.7.5 *Toute chaîne de Markov finie possède au moins une classe récurrente positive et donc au moins une distribution stationnaire portée par cette classe.*

Théorème 1.7.9 ***(Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de distributions stationnaires)***

Une chaîne de Markov finie admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente.