1.4 Lois initiales et lois de probabilités stationnaires

Notre but est ici d'étudier des distributions particulières pour les chaînes de Markov,

1.4.1 Lois initiales

Définition 1.4.1 *Soit (S_n) une chaîne de Markov, admettant l'ensemble $\mathbb{S}$, fini ou dénombrable, comme ensemble des états et la matrice $\mathbb{P}$ comme matrice de transition. Pour tout état $i \in \mathbb{S}$, on a :*

$$P(S_n = i) = \pi_n(i),$$

*on dit que π_n est la **loi initiale** de la chaîne, et $\underline{\Pi}_n$ le **vecteur initiale** de la chaîne : $\underline{\Pi}'_n := (\pi_n(1), \pi_n(2), ...)$.*

Remarque 1.4.1 *La loi conjointe des variables $S_0, ..., S_n$[2] peut être calculée en considérant toutes les probabilités de transitions de l'instant 0 à l'instant n. En effet, en utilisant la définition de la probabilité*

[2] La probabilité d'une trajectoire.

conditionnelle et la propriété markovienne, on obtient

$$\begin{aligned} P\left(S_n=i_n,S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0\right) &= P\left(S_n=i_n\left|S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0\right.\right)P\left(S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0\right) \\ &= P\left(S_n=i_n\left|S_{n-1}=i_{n-1}\right.\right)P\left(S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0\right) \end{aligned}$$

$$P\left(S_n=i_n,S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0\right)=\left\{\prod_{k=1}^{n}p_{i_{k-1}i_k}\right\}\pi_0\left(i_0\right). \tag{3.1}$$

La dernière égalité est obtenue par récurrence sur l'entier $n\geq 0$, et ce pour tous les états $i_0,...,i_n$.

Remarque 1.4.2 *La formule* (3.1) *montre que pour une chaîne de Markov $(S_n)_{n\geq 0}$, la loi de $(S_0,...,S_n)$ est complètement déterminée par la connaissance de la loi initiale et de la matrice de transition $\mathbb{P}$.*

Remarque 1.4.3 *D'après la remarque précédente, la loi d'une chaîne de Markov est caractérisée par la loi π_0 de S_0 et par sa matrice de transitition. La loi marginale de S_n est*

$$\begin{aligned} \pi_n\left(i_n\right) &= P\left(S_n=i_n\right)=\sum_{i_{n-1},...,i_0\in\mathbb{S}}P\left(S_n=i_n,S_{n-1}=i_{n-1},...,S_0=i_0\right) \\ &= \sum_{i_{n-1},...,i_0\in\mathbb{S}}\left\{\prod_{k=1}^{n}p_{i_{k-1}i_k}\right\}\pi_0\left(i_0\right). \end{aligned}$$

Lemme 1.4.1 *Soit (S_n) une chaîne de Markov, de matrice de transition $\mathbb{P}$, et soit $\underline{\Pi}_0$ la loi de S_0. Alors la loi de S_1 est $\underline{\Pi}_1$, $\underline{\Pi}_1'=\underline{\Pi}_0'\mathbb{P}$, et pour tout entier n, la loi de S_n est $\underline{\Pi}_n$, $\underline{\Pi}_n'=\underline{\Pi}_0'\mathbb{P}^n$.*

Preuve. Pour le premier point, on a pour tout i_1 de $\mathbb{S}$,

$$\pi_1\left(i_1\right)=P\left(S_1=i_1\right)=\sum_{i_0\in\mathbb{S}}P\left(S_1=i_1,S_0=i_0\right)=\sum_{i_0\in\mathbb{S}}p_{i_0i_1}\pi_0\left(i_0\right).$$

Ensuite on peut procéder par récurrence. Le rest est immédiat. ■

1.4.2 Lois de probabilités stationnaires

Définition 1.4.2 *Une distribution de probabilité $\underline{\Pi}$ satisfaisant l'équation*

$$\underline{\Pi}'=\underline{\Pi}'\mathbb{P}, \tag{3.2}$$

est appelée distribution stationnaire, ou invariante, de la matrice de transition $\mathbb{P}$ ou de la chaîne de Markov. L'équation (3.2) *dit que pour tout état $i\in\mathbb{S}$,*

$$\pi\left(i\right)=\sum_{j\in\mathbb{S}}p_{ji}\pi\left(j\right).$$

Remarque 1.4.4 *On a :* $\underline{\Pi}'\underline{1} = 1$. *De plus,* $\underline{\Pi}'\mathbb{P}\underline{1} = 1$.

Remarque 1.4.5 *Pour calculer les composantes du vecteur* $\underline{\Pi}$ *d'une chaîne de Markov, on résout le système d'équations linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \underline{\Pi}' = \underline{\Pi}'\mathbb{P} \\ \sum\limits_{j\in\mathbb{S}} \pi(j) = 1 \end{cases}.$$

Exemple 1.4.1 [***Le modèle à deux états***] *La matrice de transition du système est*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \ 0 < \alpha, \beta \leq 1,$$

on peut déterminer directement à partir de l'équation (3.2), *la probabilité invariante* $(\pi(1), \pi(2))'$ *vérifie*

$$\begin{cases} (1-\alpha)\pi(1) + \alpha\pi(2) = \pi(1) \\ \beta\pi(1) + (1-\beta)\pi(2) = \pi(2) \\ \pi(1) + \pi(2) = 1 \end{cases},$$

on obtient : $\pi(1) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ *et* $\pi(2) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Exemple 1.4.2 [***Le modèle de diffusion d'Ehrenfest***]

On peut déterminer directement à partir de l'équation (3.2), *la probabilité invariante* $(\pi(0), \pi(2), ..., \pi(a))'$ *vérifie*

$$\begin{cases} \pi(i) = \sum\limits_{j=0}^{a} p_{ji}\pi(j), \ 0 \leq i \leq a \\ \sum\limits_{j=0}^{a} \pi(j) = 1 \end{cases}.$$

Donc on peut réécrire :

$$\begin{cases} a\pi(0) = \pi(1), \ a\pi(a) = \pi(a-1), \\ \pi(i) = \left(1 - \dfrac{i-1}{a}\right)\pi(i-1) + \dfrac{i+1}{a}\pi(i+1), \ 1 \leq i \leq a-1 \end{cases}.$$

On calcule successivement $\pi(1) = a\pi(0)$, $\pi(2) = \dfrac{a(a-1)}{2}\pi(0)$, *et par récurrence* $\pi(k) = C_a^k\pi(0)$. *Comme* $1 = \sum\limits_{j=0}^{a} \pi(j) = \pi(0)\, 2^a$, *donc la loi de probabilité stationnaire est la loi binomiale* $\mathcal{B}(a; \dfrac{1}{2})$.

Théorème 1.4.1 *Si la distribution initiale d'une chaîne de Markov est la distribution stationnaire, alors la chaîne de Markov est* ***stationnaire***.

Corollaire 1.4.1 *Soit* $(S_n)_n$ *une chaîne de Markov stationnaire. Si* $\underline{\Pi}_0 = \underline{\Pi}$ *alors* $\forall n$, $\underline{\Pi}_n = \underline{\Pi}$.

Preuve. On a : $\forall n$, $\underline{\Pi}'_n = \underline{\Pi}'_0 \mathbb{P}^n$, Si $\underline{\Pi}_0 = \underline{\Pi}$, donc $\underline{\Pi}'_1 = \underline{\Pi}'\mathbb{P} = \underline{\Pi}'$, et par récurrence, $\underline{\Pi}_n = \underline{\Pi}$. ■

1.5 Chaînes de Markov réversibles

Les notions de retournement de temps et de réversibilité sont trés productives en théorie des chaînes de Markov.

Soit $(S_n)_n$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$ admettant une distribution stationnaire $\underline{\Pi}$ positive ($\pi(i) > 0$ pour tout état i). La matrice $\mathbb{Q}$, définie par :

$$\pi\left(i\right) q_{ij} = \pi\left(j\right) p_{ji}, \forall i, j \in \mathbb{S}, \tag{4.1}$$

est une matrice stochastique. En effet,

$$\sum_{j \in \mathbb{S}} q_{ij} = \frac{1}{\pi\left(i\right)} \sum_{j \in \mathbb{S}} \pi\left(j\right) p_{ji} = \frac{\pi\left(i\right)}{\pi\left(i\right)} = 1.$$

Alors la formule de rétrodiction de Bayes donne

$$P\left(S_{n-1} = j \middle| S_n = i\right) = \frac{P\left(S_n = i \middle| S_{n-1} = j\right) P\left(S_{n-1} = j\right)}{P\left(S_n = i\right)},$$

c'est-à-dire, au vu de (4.1), $q_{ij} = P\left(S_{n-1} = j \middle| S_n = i\right)$. On voit que $\mathbb{Q}$ est la matrice de transition de la chaîne quand on "<u>**retourne le temps**</u>".

Définition 1.5.1 *Soit* $(S_n)_n$ *une chaîne de Markov de matrice stochastique* $\mathbb{P}$*, un vecteur* $\left(\delta\left(i\right), i \in \mathbb{S}\right)'$ *est dit réversible par rapport à* $\mathbb{P}$ *si :*

$$\delta\left(i\right) p_{ij} = \delta\left(j\right) p_{ji}, \forall i, j \in \mathbb{S}. \tag{4.2}$$

Une chaîne de Markov est dite réversible si sa matrice stochastique admet un vecteur réversible.

Exemple 1.5.1 *Soit* (S_n) *la chaîne de Markov de l'Exemple* 1.4.1*. En effet,* $\frac{\beta}{\alpha+\beta}\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\beta$*, i.e.,* $\pi\left(1\right) p_{12} = \pi\left(2\right) p_{21}$*, donc la chaîne de Markov est réversible.*

Remarque 1.5.1 *La relation* (4.2) *est appelée condition d'équilibre détaillé en physique.*

Théorème 1.5.1 *Soit $\mathbb{P}$ une matrice de transition sur $\mathbb{S}$, et soit $\underline{\Pi}$ une distribution de probabilité sur $\mathbb{S}$. Si pour tout $i, j \in \mathbb{S}$, les équations de* (4.2) *sont vérifiées, alors $\underline{\Pi}$ est une distribution stationnaire de $\mathbb{P}$.*

Les états d'une chaîne de Markov se répartissent en classes que l'on définit à partir de la matrice de transition.