1.2 Relation de Chapman-Kolmogorov

Les probabilités de transition en n étapes sont en fait complètement déterminées par les probabilités de transition en une étape, c'est-à-dire ; par la matrice de transition. Ceci est explicité par les équations de **Chapman-Kolmogorov**, que nous allons voir maintenant.

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $\mathbb{S}$ et la matrice de transition $\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$. Pour $n\geq 0$ et $i,j\in\mathbb{S}$, on désigne par $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité, partant de l'état i en l'instant 0, d'être dans l'état j en l'instant n ; en d'autres termes, on pose :

$$p_{ij}^{(n)}:=P\left(S_n=j\,|S_0=i\right).$$

On pose également : $\mathbb{P}^{(n)}=\left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in\mathbb{S}}$, on peut démontrer la caractérisation de matrice de passage en n étapes.

Théorème 1.2.1 *Pour tout $n\geq 0$, la matrice de transition en n étapes est égale à la puissance $n-$iéme de la matrice de transition en une étape :*

$$\mathbb{P}^{(n)}=\mathbb{P}^{n}.$$

Preuve. Le résultat est vrai pour $n=0$ puisque $\mathbb{P}^0=\mathbb{P}^{(0)}=I$ (la matrice identité) et pour $n=1$, puisque $\mathbb{P}^{(1)}=\mathbb{P}$. Supposons $n\geq 2$, par récurrence,

$$\mathbb{P}^n=\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{P}=\mathbb{P}^{(n-1)}\mathbb{P}^{(1)}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par $p_{ij}\left(n\right)$ le coefficient en (i,j) de la matrice $\mathbb{P}^n$, on a : l'équation de Chapman $-$ Kolmogorov

$$\begin{aligned}
p_{ij}\left(n\right) &= \sum_{k\in\mathbb{S}} p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}^{(1)}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} P\left(S_{n-1}=k\,|S_0=i\right)P\left(S_1=j\,|S_0=k\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} P\left(S_{n-1}=k\,|S_0=i\right)P\left(S_n=j\,|S_{n-1}=k\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{S}} P\left(S_{n-1}=k\,|S_0=i\right)P\left(S_n=j\,|S_{n-1}=k,S_{n-2}=i_{n-2},...,S_1=i_1,\ S_0=i\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(puisque la chaîne est de Markov)}\\
&= \sum_{k,i_{1-2},\dots,i_0\in\mathbb{S}} P\left(S_{n-1}=k,S_{n-2}=i_{n-2},...,S_1=i_1\,|S_0=i\right)\\
&\quad \times P\left(S_n=j\,|S_{n-1}=k,S_{n-2}=i_{n-2},...,S_1=i_1,\ S_0=i\right),
\end{aligned}$$

puisque les événements $\{S_{n-2} = i_{n-2}, ..., S_1 = i_1\}$ forment un système complet d'événements. On en tire :

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \sum_{k,i_{1-2},...,i_0 \in \mathbb{S}} P\left(S_n = j, S_{n-1} = k, S_{n-2} = i_{n-2}, ..., S_1 = i_1 \left| S_0 = i \right.\right) \\ &= P\left(S_n = j \left| S_0 = i \right.\right) \\ &= p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.2.1 *Pour tout $n \geq 0$, la matrice $\mathbb{P}^{(n)}$ est stochastique.*

Preuve. En effet, pour tout $i \in \mathbb{S}$, on a :

$$\sum_{j \in \mathbb{S}} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in \mathbb{S}} P\left(S_n = j \left| S_0 = i \right.\right) = 1.$$

■

Remarque 1.2.1 *Les puissances entières des matrices stochastiques sont toutes stochastiques.i .e., Pour tout $n \geq 0$ la matrice $\mathbb{P}^n$ est stochastique.*

Remarque 1.2.2 *Pour tout $n > 0$ fixé, la suite $(S_{nm})_{m \geq 0}$ est une chaîne de Markov, ayant même ensemble d'états $\mathbb{S}$ et dont la matrice de transition est $\mathbb{P}^n$.*

Corollaire 1.2.2 *Pour tout $i, j \in \mathbb{S}$ et tout couple (n, m) d'entiers positifs, on a l'identité :*

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in \mathbb{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \tag{2.1}$$

ou encore

$$P\left(S_{n+m} = j \left| S_0 = i \right.\right) = \sum_{k \in \mathbb{S}} P\left(S_n = k \left| S_0 = i \right.\right) P\left(S_m = j \left| S_0 = k \right.\right).$$

Preuve. Cette identité résulte immédiatement de l'associativité du produit matriciel :

$$\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n \mathbb{P}^m = \mathbb{P}^{(n)} \mathbb{P}^{(m)}.$$

■

Proposition 1.2.1 *Soient $n \geq 0$, $m \geq 0$ deux entiers. Alors*

$$P\left(S_{n+m} = i_{n+m}, ..., S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right.\right) = \prod_{k=0}^{m} p_{i_{n+m-k-1} i_{n+m-k}}. \tag{2.2}$$

Preuve. Lorsque $m = 0$, l'identité (2.2) se réduit à (1.1). Donc, il suffit de procéder par récurrence sur m. Pour $m \geq 1$, posons :

$$\begin{aligned} A &: = \{S_{n+m} = i_{n+m}\}, \\ B &: = \{S_{n+m-1} = i_{n+m-1}, ..., S_n = i_n\}, \\ C &: = \{S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\}. \end{aligned}$$

D'après (1.1), on a : $P(A|B \cap C) = p_{i_{n+m-1}i_{n+m}}$; de plus, par récurrence sur m,

$$P(B|C) = \prod_{k=1}^{m} p_{i_{n+m-k-1}i_{n+m-k}}.$$

On conclut alors, en utilisant l'identité :

$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C) P(B|C).$$

■

1.3 Exemples classiques de chaînes de Markov

Il y a des modèles classiques de chaînes de Markov, souvent rencontrés, avec lesquels il est bon de se familiariser dès le début. En voici quelques-uns.

1.3.1 Variables aléatoires indépendantes

Si (S_n) est une suite de v.a. **i.i.d.** à valeurs dans $\mathbb{S}$, alors (S_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$,

$$p_{ij} = P(S_n = j), i, j \in \mathbb{S}.$$

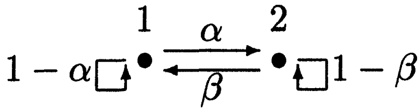
La vérification est immédiate. Ce n'est pas l'exemple le plus intéressant de chaîne de Markov !

1.3.2 La chaîne à deux états

En excluant le cas trivial de la matrice-unité, la matrice de transition correspondante est de la forme

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}, 0 \leq \alpha, \beta < 1.$$

Le graphe associé est très simple :



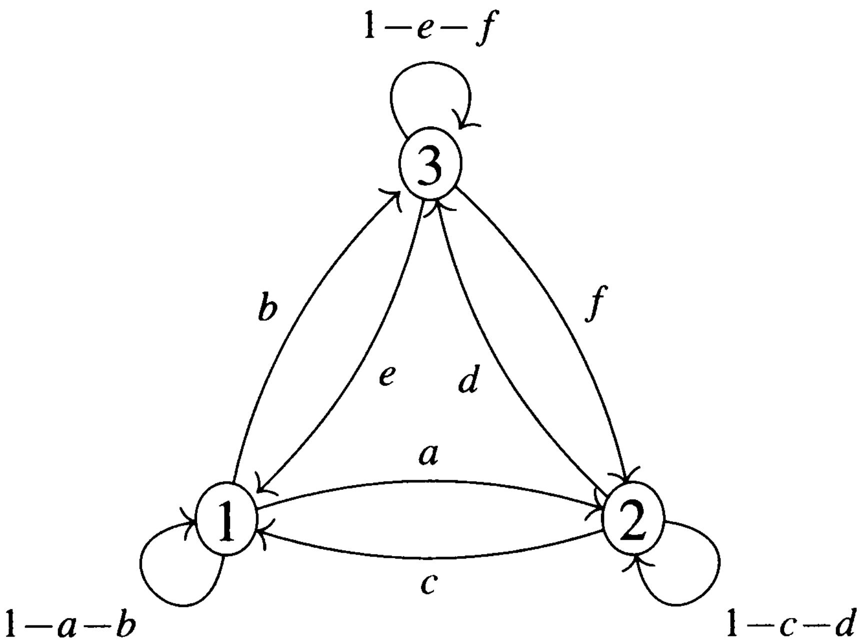
.

1.3.3 La chaîne à trois états

Les trois états sont notés $1, 2$ et 3. Il existe a, b, c, d, e et f dans $[0; 1]$, vérifiant $a + b < 1$, $c + d < 1$ et $e + f < 1$, tels que la matrice $\mathbb{P}$ est

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ c & 1-c-d & d \\ e & f & 1-e-f \end{pmatrix},$$

et le graphe est



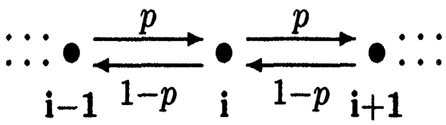
.

1.3.4 Promenade au hasard sur $\mathbb{Z}$ (Lord Rayleigh)

Considérons une chaîne de Markov, caractérisée par l'ensemble des états $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$ et la matrice de transition $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, avec, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$,

$$p_{ij} := \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où p est un nombre fixé tel que $0 < p < 1$. Un tel processus est appelé promenade aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Son graphe peut être décrit comme suit :



.

1.3.5 Le modèle de diffusion d'Ehrenfest

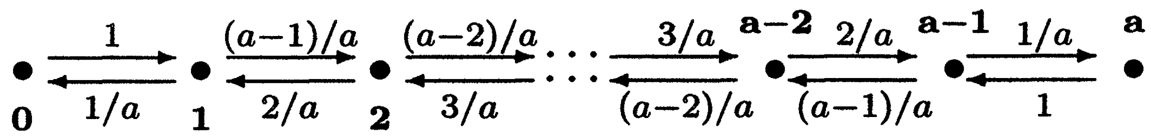
Considérons une chaîne de Markov, caractérisée par l'ensemble des états $\mathbb{S} = \{0, 1, ..., a\}$ et la matrice de transition correspondante est donnée par

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 & (a-1)\,a^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^{-1} & 0 & (a-2)\,a^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a^{-1} & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 2a^{-1} & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & (a-1)\,a^{-1} & 0 & a^{-1} \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i.e., la probabilité de transition pour que $S_{n+1} = j$ étant donné que $S_n = i$ est

$$p_{ij} := \begin{cases} (a-i)\,a^{-1} & \text{si } j = i+1 \text{ pour } 0 \le i \le a-1 \\ ia^{-1} & \text{si } j = i-1 \text{ pour } 1 \le i \le a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et le graphe associé est :



1.3.6 Marches aléatoires

Soient $\xi, e_1, e_2, ..., e_n, ...$ des v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $e_1, e_2, ...$ ont même loi et on pose pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = \xi + \sum_{k=1}^{n} e_k,$$

en remarquant que e_{n+1} est indépendante de $(S_0, S_1, ..., S_{n-1})$, on a :

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) &= P\left(e_{n+1} + S_{n-1} = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) \\
&= P\left(e_{n+1} = i_n - S_{n-1} \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) \\
&= P\left(e_{n+1} = i_n - i_{n-1} \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) \\
&= P\left(e_{n+1} = i_n - i_{n-1}\right) \\
&= P\left(e_{n+1} = i_n - i_{n-1} \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right) \\
&= P\left(e_{n+1} = i_n - S_{n-1} \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right) \\
&= P\left(e_{n+1} + S_{n-1} = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right) \\
&= P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right),
\end{aligned}$$

alors (S_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$,

$$p_{ij} = P\left(e_1 = j - i\right).$$

1.3.7 Processus de branchement

On définit par récurrence une suite (S_n) de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_0 &= m \in \mathbb{N}, \\
S_n &= \sum_{k=1}^{S_{n-1}} e_{n-1,k}, \forall n \geq 1,
\end{aligned}$$

où les v.a. $e_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}$ sont i.i.d. En observant que les v.a. $e_{n-1,k},\ k \in \mathbb{N}$ sont indépendantes de $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) &= P\left(\sum_{k=1}^{S_{n-1}} e_{n-1,k} = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{i_{n-1}} e_{n-1,k} = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0\right.\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{i_{n-1}} e_{n-1,k} = i_n\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{i_{n-1}} e_{n-1,k} = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{S_{n-1}} e_{n-1,k} = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right) \\
&= P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}\right.\right),
\end{aligned}$$

alors (S_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$,

$$p_{ij} = P\left(\sum_{k=1}^{i} e_{n-1,k} = j\right).$$