Notes de cours

Introduction aux Chaînes de Markov

UEM1.1

MASTER

Version de Janvier 2022

2022

GHEZAL AHMED

Département de Mathématiques-Informatique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Introduction aux Chaînes de Markov

Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des sciences et de la technologie
Département de Mathématique et Informatique

Master de Mathématiques

UEM1.1

Introduction aux Chaînes de Markov

Notes de cours

Année 2021-2022

Version de Janvier 2022

Cours; Ghezal Ahmed

Travaux Dirigés: Ghezal Ahmed

على
بركة الله

Table des matières

1 Chaînes de Markov discrètes **3**

1.1 Définition et premières propriétés 3

1.2 Relation de Chapman-Kolmogorov 7

1.3 Exemples classiques de chaînes de Markov 9

1.3.1 Variables aléatoires indépendantes 9

1.3.2 La chaîne à deux états 9

1.3.3 La chaîne à trois états 10

1.3.4 Promenade au hasard sur $\mathbb{Z}$ (Lord Rayleigh) 11

1.3.5 Le modèle de diffusion d'Ehrenfest 11

1.3.6 Marches aléatoires 12

1.3.7 Processus de branchement 12

1.4 Lois initiales et lois de probabilités stationnaires 13

1.4.1 Lois initiales 13

1.4.2 Lois de probabilités stationnaires 14

1.5 Chaînes de Markov réversibles 16

1.6 Classification des états 17

1.7 États récurrents et transients 20

1.8 Périodicité 24

1.9 Ergodicité 26

1.10 Séries d'exercices de TD avec solutions 27

Avant-Propos

Ce cours est une introduction aux `chaînes de Markov` à temps discret. L'étude des `chaînes de Markov` est un domaine théorique et appliqué très actif.

Le contenu du cours porte principalement sur les `chaînes de Markov` à temps discret, où nous avons exposé : définition d'une `chaînes de Markov`, matrice de transition et graphe de transition, propriétés fondamentales, probabilité de transition en n étapes, distribution stationnaire, `chaînes de Markov` récurrentes et ergodiques. La dernière section de ce cours est réservée à quelques exercices corrigés.

Enfin, toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir. Vous pouvez me les communiquer à l'adresse électronique suivante : *a.ghezal@ centre-univ-Mila.dz*

Bon courage !

Mila *Ghezal Ahmed*

2022

Chaînes de Markov discrètes

Un processus aléatoires est une suite de variables aléatoires indicées par le temps. Le cas le plus simple est celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes, mais du point de vue de la modélisation, elles ne sont pas satisfaisantes, ne prenant pas en compte la dynamique des systèmes en évolution, du fait de l'indépendance. Pour introduire cette dynamique, il faut tenir compte de l'influence du passé, ce que font les chaînes de Markov, à la facon des équations de récurrence dans les systèmes déterministes. En fait, les chaînes de Markov sont des processus aléatoires dont l'évolution est régie par une équation de récurrence. Les chaînes de Markov à temps entier occupent une place centrale dans la théorie des processus aléatoires, tant par le vaste domaine de leurs applications que par le développement de leur théorie. Les chaînes de Markov trouvent des applications dans beaucoup de domaines comme, par exemple, la biologie, la physique, la sociologie, la recherche opérationnelle et les sciences de l'ingénieur.

1.1 Définition et premières propriétés

Dans tout ce chapitre, nous considérons un processus aléatoires $S = (S_n)_{n \geq 0}$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et prenant ses valeurs dans un espace discret $\mathbb{S}$, fini ou dénombrable.

Définition 1.1.1 *On dit que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une* ***chaîne de Markov****, si pour tout $n \geq 1$ et toute suite $(i_0, ..., i_n)$ d'éléments de $\mathbb{S}$, pour laquelle la probabilité $P(S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0)$ est strictement* *positive, on a la relation suivante entre probabilités conditionnelles*[1] *:*

$$P\left(\underbrace{S_n = i_n}_{\textit{Le futur}} | \underbrace{S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0}_{\textit{Le passé et le présent}}\right) = P\left(\underbrace{S_n = i_n}_{\textit{Le futur}} \middle| \underbrace{S_{n-1} = i_{n-1}}_{\textit{Le présent}}\right). \tag{1.1}$$

Cela s'écrit également

$$\textit{La loi de } S_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right. \equiv \textit{La loi de } S_n \left| S_{n-1} = i_{n-1} \right. .$$

L'ensemble $\mathbb{S}$ est appelé l'espace des états. Autrement dit, dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à l'instant n ne dépend que de celui à l'instant $(n-1)$ précédent, mais non de ses états antérieurs. Le processus est sans mémoire ou non héréditaire.

Remarque 1.1.1 *La propriété* (1.1) *est* ***la propriété de Markov*** *ou* ***markovienne****.*

Remarque 1.1.2 *En général, la loi conditionnelle de S_n connaissant $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ dépend de toutes les variables $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ et pas seulement de la dernière S_{n-1}. Le fait qu'ici cette loi conditionnelle ne dépende que de S_{n-1} est ce qu'on appelle la propriété de Markov : pour prédire le futur (S_n) la connaissance du passé $(S_0, S_1, ..., S_{n-1})$ ne donne pas plus d'information que celle du présent (S_{n-1}).*

Exemple 1.1.1 *Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur un espace $\mathbb{E}$. Soit h une application de $\mathbb{S} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$, alors si l'on pose $S_0 = i_0$ un point fixé et si l'on définit S_n par la formule de récurrence :*

$$S_n = h\left(S_{n-1}, U_n\right), \forall n,$$

alors, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, car

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right.\right) &= P\left(h\left(S_{n-1}, U_n\right) = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right.\right) \\
&= P\left(h\left(i_{n-1}, U_n\right) = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right.\right) \\
&= P\left(h\left(i_{n-1}, U_n\right) = i_n\right),
\end{aligned}$$

car $h\left(i_{n-1}, U_n\right)$ est indépendante du vecteur $(S_{n-1}, ..., S_0)'$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right.\right) &= P\left(h\left(i_{n-1}, U_n\right) \left| S_{n-1} = i_{n-1} \right.\right) \\
&= P\left(h\left(S_{n-1}, U_n\right) \left| S_{n-1} = i_{n-1} \right.\right) \\
&= P\left(S_n = i_n \left| S_{n-1} = i_{n-1} \right.\right).
\end{aligned}$$

[1] La probabilité conditionnelle ne dépend que de i_n et de i_{n-1} et de n.

Définition 1.1.2 *La* ***chaîne de Markov*** *est dite* ***homogène*** *(dans le temps), si le second membre de* (1.1) *ne dépend pas de n. Soit*

$$p_{ij} := P\left(S_n = j \,|S_{n-1} = i\,\right),$$

cette probabilité ; on l'appelle la probabilité de passage de l'état i à l'état j, en une étape, ou en une opération, ou encore, en une transition.

Dans toute la suite, les chaînes Markov considérées seront toutes homogènes et à espace d'états $\mathbb{S}$, fini ou dénombrable.

Définition 1.1.3 *La matrice*

$$\mathbb{P} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont les probabilités de transition p_{ij} est appelée ***matrice de passage*** *(ou de* ***transition****) de la chaîne. C'est une matrice finie ou dénombrable, suivant que l'ensemble des états est fini ou dénombrable.*

Propriétés 1.1.1 *Toute matrice de transition $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{S}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout couple (i, j), on a : $p_{ij} \geq 0$,*
2. *pour tout $i \in \mathbb{S}$, on a : $\sum\limits_{j\in\mathbb{S}} p_{ij} = 1$.*

Preuve. Les nombres p_{ij} sont des probabilités, donc des nombres positifs. Par ailleurs, pour chaque $i \in \mathbb{S}$, l'application $A \longmapsto \sum\limits_{j\in A} p_{ij}$ définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}$. ■

Remarque 1.1.3 *Une matrice $\mathbb{P}$, qui vérifie les conditions* (1) *et* (2) *de la propriété précédente, est appelée matrice stochastique ou matrice markovienne.*

Exemple 1.1.2 *Sur $\mathbb{S} = \{1; 2; 3\}$, la matrice suivante est une matrice stochastique :*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

En effet, les entrées de la matrice sont positives, et la somme sur chaque ligne vaut 1.

Propriété 1.1.1 *Soit $\mathbb{P}$ une matrice de transition. Alors*

- $\mathbb{P}$ *admet la valeur propre* 1,
- *on peut associer à cette valeur propre le vecteur propre* $\underline{1}$ *ayant toutes ses composantes égales à* 1.

Preuve. En effet, on a : $\mathbb{P}\underline{1} = \underline{1}$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{S}$, la relation suivante est satisfaite :

$$\sum_{j \in \mathbb{S}} p_{ij} = 1.$$

■

La proposition suivante rassemble d'autres propriétés simples des chaînes de Markov.

Proposition 1.1.1 *Soit* $(S_n)_{n \geq 0}$ *une chaîne de Markov de matrice de transition* $\mathbb{P}$. *Pour tout entier* $n \geq 0$ *et toute fonction mesurable* $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *si* $f(S_n) \in \mathbb{L}_1$, *on a :*

$$E\left\{ f(S_n) \,| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right\} = E\left\{ f(S_n) \right| S_{n-1} = i_{n-1} \right\}.$$

Preuve. D'après la définition,

$$\begin{aligned} E\left\{ f(S_n) \,| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right\} &= \sum_{j \in \mathbb{S}} f(j)\, P\left(S_n = j \,| S_{n-1} = i_{n-1}, ..., S_0 = i_0 \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{S}} f(j)\, P\left(S_n = j \,| S_{n-1} = i_{n-1} \right) \\ &= E\left\{ f(S_n) \right| S_{n-1} = i_{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

■

A partir de la matrice de transition d'une chaîne de Markov, nous construisons un graphe. Il donne les mêmes informations que la matrice,

Définition 1.1.4 ***(Graphe associé à une matrice de transition)***

À toute matrice de transition, on peut associer son ***graphe****. Les sommets du graphe sont les différents états de la chaîne. Il y a une flèche, étiquetée* p_{ij} *entre le sommet étiqueté* i *et le sommet étiqueté* j *si et seulement si la probabilité de transition de l'état* i *à l'état* j *est strictement positive :* $p_{ij} > 0$.

Lorsque l'ensemble des états est fini, cette présentation de la matrice de transition par son graphe est particulièrement utile et parlante.