3. Formes quadratiques

3.1 Formes quadratiques

Définition 3.1.1 Soit $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$. L'application

$$\begin{array}{rccl} q: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & q(x) = f(x,x) \end{array}$$

est dite **la forme quadratique associée a** f.
f est dite **la forme polaire associée à** q.

■ **Example 3.1**

1. Soit la forme bilinéaire symétrique
$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$
La forme quadratique associée à φ est
$$\begin{array}{rccl} q_\varphi: & \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & q_\varphi = \varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt \end{array}$$
2. Soit la forme bilinéaire symétrique
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}$$
La forme quadratique associée à f est
$$\begin{array}{rccl} q_f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \longmapsto & q_f((x_1,x_2)) = x_1^2 - x_2^2 \end{array}$$

■

3.1.1 Propriétés des formes quadratiques

Proposition 3.1.1 Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{K}$espace vectoriel et f sa forme polaire.

i) $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x), \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
ii) $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y), \quad \forall x,y \in E$ (Identité de polarisation).
iii) $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)), \quad \forall x,y \in E$ (Identité de mediane).

Démonstration.

i) Soient $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

$$q(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) = \alpha\alpha f(x,x) = \alpha^2 q(x).$$

ii) soient $x,y \in E$

$$\begin{aligned} q(x+y) &= f(x+y, x+y) \\ &= f(x, x+y) = f(y, x+y) \\ &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) \\ &= q(x) + 2f(x,y) + q(y). \end{aligned}$$

iii) De ii on a

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2f(x,y), \quad q(x-y) = q(x) + q(y) - 2f(x,y)$$

donc

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

■

R L'identité de polarisation permet de déterminer f en fonction de q,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right].$$

■ **Example 3.2**
Soit la forme quadratique

$$\begin{aligned} q : \quad & \mathbb{R}^2 && \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) && \longmapsto q_f((x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 \end{aligned}$$

La forme polaire de q est

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 && \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) && \longmapsto f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \frac{1}{2}\left[q((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) - q((x_1, x_2)) - q((y_1, y_2))\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[q((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) - q((x_1, x_2)) - q((y_1, y_2))\right] \\ &= x_1y_1 + 2x_2y_2 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1. \end{aligned}$$

■

3.1.2 Cône isotrope

Définition 3.1.2 Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{K}$espace vectoriel. Un vecteur $x \in E$ est dit **vecteur isotrope** si $q(x) = 0$.
L'ensemble de touts les vecteurs isotrope de q, noté $C(q)$ est dit Cône isotrope, c'est-à-dir

$$C(q) = \{x \in E; \quad q(x) = 0\}.$$

R

1. On a $q(0) = 0$, donc 0 est toujours vecteur isotrope.
2. En générale le Cône isotrope n'est pas un sous espace vectoriel de E.

■ **Example 3.3** Soit la forme quadratique

$$\begin{array}{rcl} q_f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & q_f((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C(q) & = & \{(x_1, x_2); \quad q((x_1, x_2)) = 0\} \\ & = & \left\{(x_1, x_2); \quad x_1^2 - x_2^2 = 0\right\} \\ & = & \{(x_1, \pm x_1); \quad x_1 \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

■

3.1.3 Noyau d'une forme quadratique

Définition 3.1.3 Le noyau d'une forme quadratique, noté $N(q)$ est le noyau de sa forme polaire, c'est-à-dire

$$N(q) = Ann(f).$$

■ **Example 3.4** ■

3.1.4 Matrice associée à une forme quadratique

Définition 3.1.4 Soient q une forme quadratique sur E un K-espace vectoriel de dimonsion fini et B une base de E. La matrice associée à q par rapport à la base B, noté $\mathscr{M}_B(q)$, est la matrice associée à la forme polaire f de q par rapport à B, c'est-à-dire

$$\mathscr{M}_B(q) = \mathscr{M}_B(f).$$

R La matrice associée à une forme quadratique est symétriques ($\mathscr{M}_B(q) =^t \mathscr{M}_B(q)$).

■ **Example 3.5** ■

Définition 3.1.5 Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canonique. La matrice associée à q par rapport à la base B est

$$M_B(q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1}(e_1) & \frac{\partial q}{\partial x_2}(e_1) & \cdots & \frac{\partial q}{\partial x_n}(e_1) \\ \frac{\partial q}{\partial x_1}(e_2) & \frac{\partial q}{\partial x_2}(e_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q}{\partial x_1}(e_n) & \frac{\partial q}{\partial x_2}(e_n) & \cdots & \frac{\partial q}{\partial x_n}(e_n) \end{pmatrix}$$

■ **Example 3.6**
Soit la forme quadratique

$$\begin{array}{rcl} q:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3 \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x_1} &= 2x_1+2x_2-4x_3 \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 2x_1+6x_2 \\ \frac{\partial q}{\partial x_3} &= -4x_1+6x_3 \end{aligned}$$

Donc la matrice associée à q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}$ est

$$M_B(q)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

3.1.5 Forme quadratique associée à une matrice carrée

Proposition 3.1.2 Soit $M=(a_{ij})$ une matrice symétrique associée à la forme quadratique q par rapport à la base canonique $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ de E, alors

$$\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\quad q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$$

Démonstration. Soit $M(a_{ij})$ une matrice symétrique ($a_{ij}=a_{ji}$ ou ${}^tM=M$)

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Soit f la forme polaire associée à q, donc

$$\begin{aligned}
q(x) &= f(x,x) \\
&= {}^{t}xMx \\
&= (x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2} + \dots + x_n \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j.
\end{aligned}$$

■

R Le diagonale de M est formé par les coifficients de x_i^2.

■ **Example 3.7**
Soit la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la forme quadratique q associée à M est

$$\begin{aligned}
q : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\
(x_1,x_2,x_3) &\mapsto q((x_1,x_2,x_3))
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
q((x_1,x_2,x_3)) &= \sum_{i=1}^{3} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i \le j \le 3} a_{ij} x_i x_j. \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2(3x_1x_2 - 2x_1x_3) \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3.
\end{aligned}$$

■

3.1.6 Rang d'une forme quadratique

Définition 3.1.6 Le rang d'une formz quadratique q, noté $ran(q)$ est le rang de sa matrice associée pour n'import base de E.

3.2 Réduction des formes quadratiques