

Cours de la programmation linéaire
Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et
mathématiques fondamentales
Département de mathématiques et informatiques
Université abdelhafid BOUSSOUF MILA
Anné universitaire 2022/2023

Chapitre 4 Section 1

Table des matières

introduction	3
1 La dualité en programmation linéaire	3
1.1 Introduction et généralités	3
1.2 Relations entre le programme primal et dual	3
1.3 Théorèmes et propriétés fondamentales de la dualité	6
1.4 Algorithmes dual et primal-dual	6

1

La dualité en programmation linéaire

1.1 Introduction et généralités

La dualité est l'un des concepts essentiels en programmation mathématique, en particulier, en programmation linéaire, elle joue un rôle fondamental dans la résolution des programmes et dans l'analyse post-optimale est sensible. Le programme dual a une interprétation économique importante. De plus d'importantes propriétés mathématiques lient les deux programmes (primal et dual).

1.2 Relations entre le programme primal et dual

Considérons le programme linéaire, appelé primal suivant :

$$\text{Min}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

1.2 Relations entre le programme primal et dual

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n \geq b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{h,1} x_1 + a_{h,2} x_2 + \dots + a_{h,n} x_n \geq b_h \\ a_{h+1,1} x_1 + a_{h+1,2} x_2 + \dots + a_{h+1,n} x_n = b_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in E, x_j \geq 0, j = 1 \dots k, x_j \in R, j = k + 1 \dots n \end{array} \right.$$

On associe à chaque contrainte $i (i = \overline{1, M})$ une variable u_i appelée variable duale. Le programme dual associé est :

$$\begin{array}{l} \text{Max} W = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_m \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} u_1 + a_{2,1} u_2 + \dots + a_{m,1} u_m \leq c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1,k} u_1 + a_{2,k} u_2 + \dots + a_{m,k} u_m \geq c_k \\ a_{1,k+1} u_1 + a_{2,k+1} u_2 + \dots + a_{m,k+1} u_m = c_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1,n} u_1 + a_{2,n} u_2 + \dots + a_{m,n} u_m = c_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in E, u_i \geq 0, i = 1 \dots h, u_i \in R, i = h + 1 \dots m \end{array} \right. \end{array}$$

De cette définition on tire les propriétés suivantes :

- Cette transformation est involutive (le dual du dual est le primal).
- Une variable primale non négative correspond à une contrainte inégalité dans le dual et inversement.
- Une variable primale non astringente correspond à une contrainte égalité dans le dual et inversement.
- La matrice des contraintes du dual est la transposée du primal.
- les coefficients dans la fonction objectif du primal sont les seconds membres des contraintes du dual et inversement.
- Un problème de minimisation avec contraintes " \geq " ou " $=$ " du primal devient un problème de maximisation avec contraintes " \leq " ou " $=$ " du dual et inversement.

Exemple 1.1 Soit le programme linéaire primal suivant :

$$\text{Max} Z = 4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4$$

1.2 Relations entre le programme primal et dual

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_3, x_4 \in R \end{cases}$$

et soit son programme linéaire dual :

$$\text{Min}W = 10u_1 + 4u_2$$

$$\begin{cases} u_1 + 0u_2 \geq 4 \\ 0u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ u_1 + 2u_2 = 20 \\ 2u_1 + u_2 = 17 \\ u_1 \geq 0 \\ u_2 \in R \end{cases}$$

Remarque 1.1 L'introduction des variables d'écart dans la forme primale ne modifie pas la forme duale, en effet :

$$\begin{aligned} & \text{Min}Z = CX \\ & \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Primal}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Max}W = UB \\ & \begin{cases} UA \leq C \\ U \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Dual}) \end{aligned}$$

En introduisant les variables d'écarts

$$\begin{aligned} & \text{Min}Z = CX \\ & \begin{cases} AX_E \geq B \\ X \geq 0 \\ E \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Primal}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{Max}W = UB \\ \left\{ \begin{array}{l} UA \leq C \\ -U \leq 0 \\ U \in R \end{array} \right. \quad (\text{Dual}) \end{array}$$

1.3 Théorèmes et propriétés fondamentales de la dualité

Lemme 1.1 *Soient les programmes duaux suivants :*

$$\begin{array}{l} \text{Min}Z = CX \\ \left\{ \begin{array}{l} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{array} \right. \quad (P) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Max}W = UB \\ \left\{ \begin{array}{l} UA \leq C \\ U \in R \end{array} \right. \quad (D) \end{array}$$

soit \tilde{x} une solution réalisable de (P) et \tilde{u} solution de (D) alors on a $c\tilde{x} \geq \tilde{u}b$

En effet,

1.4 Algorithmes dual et primal-dual

