Centre Universitaire de Mila | Nom
3ème année Licence Mathématiques | Prénom
Module : Transformations intégrales dans les espaces Lp | Groupe

---

EXAMEN

Date : 03/11/2020. Durée : 1h

Exercice 1 (4.5 points) Soient $p, q, r \in]1, \infty[$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors $f\,g \in L^r$ et

$$\|f\,g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

$\int |f \cdot g|^r \, d\mu = \int |f|^r \cdot |g|^r \, d\mu$ 0,5

posons: $F = f^r$, $G = g^r$ 0,5

Nous avons:

$f \in L^p(\Omega)$ alors: $f^r = F \in L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$

$g \in L^q(\Omega)$ alors: $g^r = G \in L^{\frac{q}{r}}(\Omega)$ 0,5

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors: $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$ 0,5

donc $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$ sont deux nombres conjugués 0,5

De l'inégalité de Holder (pour F, G et p', q')

$$\int |f g|^r \, d\mu = \int |F \cdot G| \, d\mu \leq \left(\int |F|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int |G|^{q'} d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}$$ 0,5

$$= \left(\int |f|^{r \frac{p}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\int |g^r|^{\frac{q}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{q}}$$ 0,5

$$= \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$$ 0,5

On a $F \cdot G \in L^1(\Omega)$ donc $f \cdot g \in L^r(\Omega)$

d'où $\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$ 0,5

Exercice 2 (5.5 points) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \mathbb{1}_{[-T,T]} = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-T,T] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. La transformée de Fourier de f existe (1.5 pt)

 * Vraie ou faux? Vraie 0,5

 * Justification $f \in L^1(\mathbb{R})$ car $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{-T}^{T} 1.\,dx = x\Big|_{-T}^{T} = 2T < +\infty \quad 1$$

2. La transformée de Fourier de f est (1.5 pt)

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\,dx = \int_{-T}^{T} 1.e^{-iwx}\,dx \quad 0,5$$
$$= \frac{-1}{iw} e^{-iwx}\Big|_{-T}^{T} = \frac{-1}{iw}\left(e^{-iwT} - e^{iwT}\right) \quad 0,5$$
$$= \frac{-1}{iw}\left(\cos wT - i\sin wT - \cos wT - i\sin wT\right) = \frac{2\sin wT}{w} \quad 0,5$$

3. $\int_0^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx = ??$ (Théorème de Parseval Plancherel) (2.5 pt)

Pour $T = 1$, $\hat{f}_1(w) = \mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\right) = 2.\frac{\sin w}{w}$ 0,5

T.P.P Si $f_1 \in L^2$ alors: $\|f_1\|_2 = \|\hat{f}_1\|_2$ 0,5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1.\,dx = 2 < \infty \Rightarrow f_1 \in L^2(\mathbb{R}) \quad 0,5$$

donc de Théorème P.P., $\|f_1\|_2 = \|\hat{f}_1\|_2$

$$\|f_1\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \quad 0,5$$
$$\|\hat{f}_1\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2.\frac{\sin w}{w}\right)^2 dx \quad 0,5$$
$$= 4.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 dx = 4.2\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 dx$$

d'où $\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 dx = \frac{1}{4}$ 0,5

Exercice 3 (10 points)

1. Donner la transformée de Laplace des fonctions suivantes (3 pts)

a° $f_1(t) = t\exp^{at}$

Soit $g(t) = t$ alors : $\mathcal{L}(g(t)) = G(p) = \frac{1}{p^2}$ 0,5

donc $\mathcal{L}(f_1(t)) = \mathcal{L}(e^{at} g(t)) = G(p-a)$ 0,5

$$= \frac{1}{(p-a)^2}$$ 0,5

b° $f_2(t) = t^2\exp^{-t}\sin t$

Soit $h(t) = \sin t$ alors : $H(p) = \mathcal{L}(h(t)) = \frac{1}{p^2+1}$ 0,5

Soit $g(t) = t^2 \sin t$ alors : $G(p) = (-1)^2 \cdot H^{(2)}(p)$

$$= \left(\frac{1}{p^2+1}\right)'' = \frac{-2p^2+8p-2}{(p^2+1)^3}$$ 0,5

D'où $\mathcal{L}(f_2(t)) = G(p+1) = \frac{-2(p+1)^2+8(p+1)-2}{((p+1)^2+1)^3}$. 0,5

2. Trouver la transformée de Laplace inverse de la fraction suivante (3pts) $\frac{2n+1}{(n-2)(n^2+1)}$

$$\frac{2n+1}{(n-2)(n^2+1)} = \frac{a}{n-2} + \frac{bn+c}{n^2+1}$$ 0,5

$$a = \frac{2n+1}{n^2+1}\Big|_{n=2} = \frac{5}{5} = 1$$ 0,5

$$\frac{1}{n-2} + \frac{bn+c}{n^2+1} = \frac{(1+b)n^2+(c-2b)n+1-2c}{(n-2)(n^2+1)}$$

donc $\begin{cases} 1+b=0 \\ c-2b=2 \\ 1-2c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=0 \end{cases}$ 0,5 × 2

d'où : $\frac{2n+1}{(n-2)(n^2+1)} = \frac{1}{n-2} - \frac{n}{n^2+1}$ 0,5

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2n+1}{(n-2)(n^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{n-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$$= e^{2x} - \cos x$$ 0,5

3. Résoudre l'équation différentielle suivante (4pts)

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0 \quad \text{avec } y(0) = 2,\ y'(0) = -4.$$

$$\mathcal{L}(y''(x)) + 2\mathcal{L}(y'(x)) + 5\mathcal{L}(y(x)) = \mathcal{L}(0) = 0$$ 0,5

$$p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + 2\left(p\,Y(p) - y(0)\right) + 5\,Y(p) = 0$$ 0,5

$$(p^2 + 2p + 5)\,Y(p) - 2p + 4 - 4 = 0$$ 0,5

donc $$Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 2p + 5}$$ 0,5

$$= \frac{2p + 2 - 2}{p^2 + 2p + 5}$$

$$= 2 \cdot \frac{(p+1)}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}$$ 0,5

donc $$y(x) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}\right)$$ 0,5

posons: $f(x) = \cos 2x \Rightarrow F(p) = \frac{p}{p^2 + 2^2}$

d'où $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(p+1)\right) = e^{-x}\cos 2x$$ 0,5

Posons: $g(x) = \sin 2x \Rightarrow G(p) = \frac{2}{p^2 + 2^2}$

d'où $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(p+1)\right) = e^{-x}\sin 2x$$ 0,5

D'où: $$y(x) = 2e^{-x}\cos 2x - e^{-x}\sin 2x.$$

Bonne chance

N.Haddad