Exercice 01 :

Prouvez la validité du théorème de convolution discrète à une variable. Voir les équations suivantes :

$$g(t) * h(t) \Leftrightarrow G(u)H(u)$$

$$g(t)h(t) \Leftrightarrow G(u) * H(u)$$

$$g(t) * h(t) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(t-m)$$

Vous devrez utiliser les propriétés de la translation et inversement,

Solution :

En référence à l'énoncé du théorème de convolution, nous voulons démontrer que

$$g(x) * h(x) \Leftrightarrow G(u)H(u)$$

et que

$$g(x)h(x) \Leftrightarrow G(u) * H(u)$$

Donc on a l'équation suivante qui définit la convolution 1D:

$$g(x) * h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} g(m)h(x-m)$$

et d'après la définition de la DFT, on a :

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-i2\pi ux/N} \qquad u = 0,1,2,\dots,N-1$$

On aura:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}[f(x) * h(x)] &= \sum_{x=0}^{M-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x-m)\right]e^{-i2\pi ux/M} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} f(m)\left[\sum_{x=0}^{M-1} h(x-m)\, e^{-i2\pi ux/M}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} f(m)H(u)e^{-i2\pi um/M} \\
&= H(u)\sum_{m=0}^{M-1} f(m)e^{-i2\pi um/M} \\
&= H(u)F(u).
\end{aligned}$$

Le reste du théorème est prouvée d'une manière similaire.

Exercice 02 :
Ecrire une expression pour la convolution continue 2D.

Solution :
Soit l'équation suivante qui définit l'opération de convolution en 1D:

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

On pourra généraliser l'opération de convolution en 2D en utilisant l'équation suivante :

$$f(t,z) * h(t,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)h(t-\alpha,z-\beta)d\alpha\, d\beta.$$

Exercice 03 :
(a) Prouver la validité de la propriété de translation dans l'équation suivante :

$$\mathrm{f(x,y)e}^{\mathrm{i2\pi}\left(\frac{\mathrm{u_0x}}{\mathrm{M}}+\frac{\mathrm{v_0y}}{\mathrm{N}}\right)} \Leftrightarrow \mathrm{F(u-u_0, v-v_0)}$$

(b) Prouver la validité de l'équation :

$$\mathrm{f(x-x_0, y-y_0)} \Leftrightarrow \mathrm{F(u,v)e}^{-\mathrm{i2\pi}\left(\frac{\mathrm{ux_0}}{\mathrm{M}}+\frac{\mathrm{vy_0}}{\mathrm{N}}\right)}$$

Solution :
(a) On a, par définition de la DFT :

$$\mathrm{F(u,v)} = \sum_{\mathrm{x=0}}^{\mathrm{N-1}}\sum_{\mathrm{y=0}}^{\mathrm{M-1}} \mathrm{f(x,y)e}^{-\mathrm{i2\pi(ux/N+vy/M)}}$$

$$\mathfrak{F}\left[f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i2\pi}(u_0\mathrm{x/M+v_0y/N})}\right] = \sum_{\mathrm{x=0}}^{\mathrm{N-1}}\sum_{\mathrm{y=0}}^{\mathrm{M-1}}\left[\mathrm{f(x,y)e}^{\mathrm{i2\pi}(u_0\mathrm{x/M+v_0y/N})}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i2\pi(ux/N+vy/M)}}$$

$$= \sum_{\mathrm{x=0}}^{\mathrm{N-1}}\sum_{\mathrm{y=0}}^{\mathrm{M-1}} \mathrm{f(x,y)e}^{-\mathrm{i2\pi}[(\mathrm{u}-u_0)x/N+(v-\mathrm{v_0})y/M]}$$

(En utilisant la propriété : $e^a e^b = e^{a+b}$)

$$= F(\mathrm{u}-u_0, v-\mathrm{v_0}).$$

(b) On a, par définition de la DFT inverse :

$$\mathrm{f}(x,\mathrm{y}) = \sum_{\mathrm{u=0}}^{\mathrm{N-1}}\sum_{\mathrm{v=0}}^{\mathrm{M-1}} \mathrm{F(u,v)e}^{\mathrm{i2\pi(ux/N+vy/M)}}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[F(u,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i2\pi(ux_0+vy_0)}}\right] = \frac{1}{MN}\sum_{\mathrm{u=0}}^{\mathrm{N-1}}\sum_{\mathrm{v=0}}^{\mathrm{M-1}}\left[\mathrm{F(u,v)e}^{-\mathrm{i2\pi(u}x_0\mathrm{/M+v}y_0/N)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i2\pi(ux/N+vy/M)}}$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{\mathrm{u=0}}^{\mathrm{N-1}}\sum_{\mathrm{v=0}}^{\mathrm{M-1}} \mathrm{F(u,v)e}^{\mathrm{i2\pi}[u(x-x_0)/N+v(y-y_0)/M]}$$

(En utilisant la propriété : $e^a e^b = e^{a+b}$)

$$= f(\mathrm{x}-x_0, y-\mathrm{y_0}).$$

Exercice 04 :
Montrer que la transformée Radon de la forme gaussienne $f(x,y) = A.exp(-x^2 - y^2)$ est $g(\rho,\theta) = A\sqrt{\pi}exp(-\rho^2)$ (Indice: utiliser la symétrie pour simplifier l'intégration.)

Solution :
Soit $f(x,y) = A.exp(-x^2 - y^2)$, comme $f(x,y)$ est symétrique en rotation, ses projections sont les mêmes pour tous les angles, il suffit donc d'obtenir la projection pour $\theta = 0°$. L'équation de la transformée de Radon devient alors

$$\Re\{f(x,y)\} = g(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x-\rho)dxdy$$

$$= A\int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho,y)dy$$

$$= Ae^{-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy.$$

En utilisant la propriété de la distribution normale (Gaussienne) :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2\sigma^2}dz = 1$$

il s'ensuit en mettant $\sigma^2 = 1/2$ dans cette équation que,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 1$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$$

et

$$g(\rho,\theta) = A\sqrt{\pi}e^{-\rho^2}$$

Exercice 05 :
(a) Montrer que la transformée de Radon de l'impulsion unitaire $\delta(x,y)$ est une **droite verticale** dans le plan-$\rho\theta$ passant par l'origine.
(b) Montrer que la transformée radon de l'impulsion $\delta(x - x_0, y - y_0)$ est une courbe sinusoïdale dans le plan-ρθ.

Solution :
(a) En substituant dans l'équation de la transformée de Radon on aura :

$$\Re\{f(x,y)\} = g(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times \delta(0 - \rho)dxdy$$

$$= \begin{cases} 1 \; si\; \boldsymbol{\rho = 0} \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

où la troisième étape découle du fait que $\delta(x,y)$ est nul si x et/ou y ne sont pas nuls.

(b) De même, la substitution dans l'équation de la transformée de Radon,

$$\Re\{f(x,y)\} = g(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0, y - y_0)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times \delta(x_0 cos\theta + y_0 sin\theta - \rho)dxdy$$

D'après la définition de l'impulsion, ce résultat est 0 sauf si

$$\boldsymbol{\rho = x_0 cos\theta + y_0 sin\theta}$$

qui est l'équation d'une courbe sinusoïdale dans le plan$-\rho\theta$.

Exercice 06 :

Prouvez la validité des propriétés suivantes de la transformée de Radon:

(a) Linéarité: la transformée de Radon est un opérateur linéaire.

(b) Propriété de translation: la transformée radon de $f(x - x_0, y - y_0)$ est $g(\rho - x_0 cos\theta - y_0 sin\theta, \theta)$

(c) Propriété de convolution: montrer que la transformée de Radon de la convolution de deux fonctions est égale à la convolution des transformées de Radon des deux fonctions.

Solution :

(a) Nous savons qu'un opérateur H est linéaire si $H(af_1 + bf_2) = aH(f_1) + bH(f_2)$. D'après la définition de la transformée de Radon, on a

$$\begin{aligned} H(af_1 + bf_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(af_1 + bf_2)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy + b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy \\ &= aH(f_1) + bH(f_2). \end{aligned}$$

Ce qui montre que la transformée de Radon est une opération linéaire.

(b) Soit $p = x - x_0$ et $q = y - y_0$. Alors $dp = dx$ et $dq = dy$. Et soit la définition de la transformée de Radon donnée par l'équation suivante :

$$\Re\{f(x,y)\} = g(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy$$

À partir de cette définition, la transformée de Radon de $f(x - x_0, y - y_0)$ est :

$$\begin{aligned} g(\rho,\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0, y - y_0)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(p,q)\delta((p + x_0)cos\theta + (q + y_0)sin\theta - \rho)dpdq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p,q)\delta[pcos\theta + qsin\theta - (\rho - x_0 cos\theta - y_0 sin\theta)]dpdq \\ &= g(\rho - x_0 cos\theta - y_0 sin\theta, \theta) \end{aligned}$$

(c) Du chapitre 3, nous savons que la convolution de deux fonctions f et h est définie comme

$$\begin{aligned} c(x,y) &= f(x,y) * h(x,y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x - \alpha, y - \beta)d\alpha\, d\beta. \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que $\Re\{c\} = \Re\{f\} * \Re\{h\}$, où $\Re$ désigne la transformée de Radon. Nous faisons cela en substituant l'expression de convolution dans l'équation de définition de Radon. Autrement dit,

$$\Re\{c\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)dxdy$$

$$\Re\{c\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha, y-\beta)d\alpha d\beta\right] \times \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)dxdy$$

$$= \int_{\alpha}\int_{\beta} f(\alpha,\beta) \times \left[\int_{x}\int_{y} h(x-\alpha, y-\beta)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)dxdy\right]d\alpha d\beta$$

où nous avons utilisé les indices dans les intégrales pour plus de clarté entre les intégrales et leurs variables. Toutes les intégrales sont comprises entre $-\infty$ et ∞. En travaillant avec les intégrales entre parenthèses avec $x' = x - \alpha$ et $y' = y - \beta$, nous avons :

$$\int_{x}\int_{y} h(x-\alpha, y-\beta)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)dxdy$$

$$= \int_{x'}\int_{y'} h(x', y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - [\rho - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta])dx'dy'$$

$$= \Re\{h\}(\rho - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \theta).$$

La seconde intégrale est connue comme la transformée de Radon de h, mais au lieu d'être par rapport à ρ et θ, elle est en fonction de $\rho - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta$ et θ. La notation de la dernière ligne est utilisée pour indiquer «la transformée de Radon de h en fonction de $\rho - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta$ et θ». Alors :

$$\Re\{c\} = \int_{\alpha}\int_{\beta} f(\alpha,\beta) \times \left[\int_{x}\int_{y} h(x-\alpha, y-\beta)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)dxdy\right]d\alpha d\beta$$

$$= \int_{\alpha}\int_{\beta} f(\alpha,\beta)\Re\{h\}(\rho - \rho', \theta)d\alpha d\beta$$

où $\rho' = \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta$. Ensuite, en fonction des propriétés de l'impulsion, nous pouvons écrire :

$$\Re\{h\}(\rho - \rho', \theta) = \int_{\rho'} \Re\{h\}(\rho - \rho', \theta)\delta(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta - \rho')d\rho'.$$

donc,

$$\Re\{c\} = \int_{\alpha}\int_{\beta} f(\alpha,\beta)\Re\{h\}(\rho - \rho', \theta)d\alpha d\beta$$

$$= \int_{\alpha}\int_{\beta} f(\alpha,\beta)\left[\int_{\rho'} \Re\{h\}(\rho - \rho', \theta)\delta(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta - \rho')d\rho'\right]d\alpha d\beta$$

$$= \int_{\rho'} \Re\{h\}(\rho - \rho', \theta)\left[\int_{\alpha}\int_{\beta} f(\alpha,\beta)\delta(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta - \rho')d\alpha d\beta\right]d\rho'$$

$$= \int_{\rho'} \Re\{h\}(\rho - \rho', \theta)\Re\{f\}(\rho', \theta)d\rho'$$

$$= \Re\{f\} * \Re\{h\}$$

où la quatrième étape correspond à la définition de la transformée de Radon et la cinquième étape correspond à la définition de la convolution. Ceci complète la preuve.