Série n° 1 (équations différentielles)

Exercice 1 :

$\ddot{x} + 4x = 0$ (équation du type $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$)

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

alors la solution de cette équ. diff a la forme suivante :

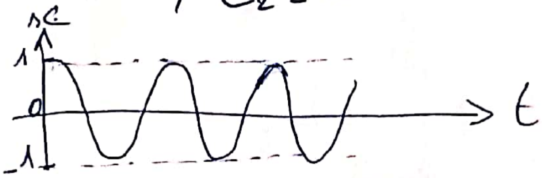
$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

pour calculer C_1 et C_2 on utilise les conditions initiales.

a/ $t=0 \begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ \dot{x} = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t \end{cases}$

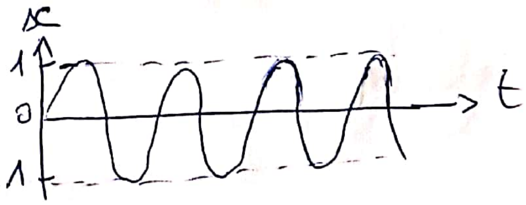
$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

alors : $x(t) = \cos 2t$



b/ $t=0 \begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

alors : $x(t) = \sin 2t$



Exercice 2 :

① $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$ (équation du type $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$)

L'équation caractéristique est : $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

On calcule les racines de l'equ. caractéristique :

$\Delta = 5^2 - 4 \times 4 = 9 > 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -4$

alors la solution de l'équation diff. a la forme suivante :

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

On trouve C_1 et C_2 à partir des conditions initiales.

On a : $\dot{x}(t) = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-4t}$

$t=0 \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_1-4C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-4C_2 \\ -4C_2+C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=-\frac{1}{3} \\ C_1=\frac{4}{3} \end{cases}$

alors: $\boxed{x(t)=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}}$

② • $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$.

L'équation caractérstique est: $\lambda^2+4\lambda+4=0$

$\Delta=4^2-4\times4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1$

La solution de l'equ diff a la forme $x(t)=(C_1+C_2t)\cdot e^{-t}$

avec: $\dot{x}(t)=-C_1e^{-t}+C_2e^{-t}-C_2te^{-t}$

$t=0 \begin{cases} C_1+C_2\times0=1 \\ -1+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1 \end{cases}$

alors: $\boxed{x(t)=(1+t)e^{-t}}$

③ • $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$ l'équation caractérstique est:

$\lambda^2+4\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=-4$ et $\sqrt{\Delta}=2i$

$\lambda_{1,2}=-2\pm i$

alors: $x(t)=e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$

$t=0 \begin{cases} x=1 \\ \dot{x}=2 \end{cases}$ avec: $\dot{x}(t)=-2e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+e^{-2t}(-C_1\sin t+C_2\cos t)$

$\dot{x}(t)=e^{-2t}((C_2-2C_1)\cos t+(-C_1-2C_2)\sin t)$

Donc: $t=0 \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=4 \end{cases}$

alors: $\boxed{x(t)=e^{-2t}(\cos t+4\sin t)}$

Exercice3:

① • $\ddot{x}+4x=5$

La solution de l'equation différentielle est la somme de la solution de l'equation homogène (Ex1 et Ex2) et la solution particulière de l'équation non homogène.

* La solution de l'équation homogène $\ddot{x} + 4x = 0$ (d'après EX1) est $x_1(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

* La solution particulière de l'équ. non homogène est de la forme

$f(x) = A$ (deuxième membre est un constant)

On remplace dans l'équation non homogène par la solution particulière on obtient :

$$0 + 4A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

alors la solution générale est : $x(t) = x_1(t) + x_p(t)$

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{5}{4}}$$

② $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = t + 1 = f(t)\, e^{\alpha t}$ (avec $\alpha = 0$ et $f(t)$ fonction du 1er ordre)

La solution générale de l'équ. homogène est donnée dans l'EX2.

On a : $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases} \neq \alpha = 0$

La solution particulière de l'équation non homogène a la forme

$x_p(t) = (At + B)\, e^{\alpha t}$ $(\alpha = 0)$

$x_p(t) = At + B \Rightarrow \dot{x}_p(t) = A \Rightarrow \ddot{x}_p(t) = 0$

On remplace dans l'équ non homogène, on obtient :

$0 + 5A + 4(At + B) = (t + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 5A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = -1/16 \end{cases}$$

alors : $x_p(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{4}\right)$

Donc : la solution générale de l'équation non homogène est :

$$\boxed{x(t) = \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{4}\right)}$$

③. $\ddot{x}+4\dot{x}+4x = e^{t} = e^{\alpha t}$ $(\alpha = 1)$

de l'exercice 2 la solution de l'equ. homogène $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$

$\lambda_{1,2} = -1 \neq \alpha$ et : $x_1(t) = (C_1+C_2t)e^{-t} = (1+t)e^{-t}$

$\alpha \neq \lambda \Rightarrow x_p(t) = Ae^{t} \Rightarrow \dot{x}_p(t) = Ae^{t}$ et $\ddot{x}_p(t) = Ae^{t}$

On remplace dans l'equ. non homogène on obtient :

$$(A+4A+4A)e^{t} = e^{t} \Rightarrow A = \frac{1}{9}$$

alors : $x_p(t) = \frac{1}{9}e^{t}$

La solution générale de l'equation non homogène est :

$x(t) = x_1(t) + x_p(t)$

$$\boxed{x(t) = (1+t)e^{-t} + \frac{1}{9}\cdot e^{t}}$$

④. $\ddot{x}+9x = (t^2+1)e^{3t}$

pour l'equ. homogène $\ddot{x}+9x=0$ où l'equation caractéristique

est : $\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

alors : $x_1(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t$

Le second membre de l'equ. non homogène est de la forme :

$Q(t)\,e^{\alpha t}$ avec : $\alpha = 3 \neq \pm 3i$

alors la solution particulière de l'équation non homogène est de

la forme $x_p(t) = (At^2+Bt+C)e^{3t}$

$\dot{x}_p(t) = (2At+B)e^{3t} + 3e^{3t}(At^2+Bt+C) = (3At^2+(2A+3B)t+B+3C)e^{3t}$

$\ddot{x}_p(t) = (9At^2+(12A+9B)t+2A+6B+9C)e^{3t}$

On remplace dans l'equ. non homogène on obtient :

$$\begin{cases} A = 1/18 \\ B = -1/15 \\ C = 58/45 \end{cases}$$

$$x_p(t) = \left(\frac{1}{18}t^2 - \frac{1}{15}t + \frac{58}{45}\right)e^{3t}$$

donc la solution générale de l'equ. non homogène est :

$x(t) = x_1(t) + x_p(t)$

$$\boxed{x(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + \left(\frac{1}{18}t^2 - \frac{1}{15}t + \frac{58}{45}\right)e^{3t}}$$

⑤ $\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = (t-2)e^t$

L'equation homogène $\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = 0$ a l'equ caracteristique

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ de racines:

$$\lambda_1 = \frac{7+5}{2} = 6 \qquad \Rightarrow x_1(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^t$$
$$\lambda_2 = \frac{7-5}{2} = 1$$

le second membre est de la forme: $Q(t)e^{\alpha t}$ $(\alpha = 1)$

On a: $\lambda_2 = \alpha = 1$

Donc : $x_p(t) = t(At+B)e^t$

$\dot{x}_p(t) = (At^2 + (2A+B)t + B)e^t$

$\ddot{x}_p(t) = (At^2 + (4A+B)t + 2(A+B))e^t$

On remplace dans l'equ. diff non homogène:

$(-10At + 2A - 5B)e^t = (t-2)e^t$

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{10} \\ B = +\frac{9}{25} \end{cases}$$

Alors: $x_p(t) = t\left(-\frac{1}{10}t + \frac{9}{25}\right)e^t$

et la solution générale de l'equ. non homogène est:

$x(t) = x_1(t) + x_p(t)$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^t + t\left(-\frac{1}{10}t + \frac{9}{25}\right)e^t}$$

Exercice 4:

① $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 2\cos t = A\cos\beta t + B\sin\beta t$ (avec $\beta = 1$)

La solution de l'equation homogène $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$ est:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i \\ \lambda_2 = -1 - 2i \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = e^{-t}(A_1\cos 2t + A_2\sin 2t)$$

On a: $\beta i = i \neq \lambda_{1,2}$ alors la solution particulière de l'equ non homogène a la forme suivante:

$x_p(t) = A\cos t + B\sin t.$

$\dot{x}_p(t) = -A\sin t + B\cos t.$

$\ddot{x}_p(t) = -A\cos t - B\sin t.$

Par remplacement dans l'equ. non homogène on obtient :

$$-A\cos t - B\sin t + 2(-A\sin t + B\cos t) + 5(A\cos t + B\sin t) = 2\cos t$$

$$\begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/4 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\sin t$$

La solution de l'equation non homogène est :

$$x(t) = x_1(t) + x_p(t)$$

$$\boxed{x(t) = e^{-t}(A_1\cos 2t + A_2\sin 2t) + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\sin t}$$

② • $\ddot{x} + 4x = \cos 2t = A\cos\beta t + B\sin\beta t \quad (\beta = 2)$

L'equation homogène $\ddot{x} + 4x = 0$ a la solution : $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

$$x_1(t) = A_1\cos 2t + A_2\sin 2t \quad \text{(l'exercice 1)}$$

On a : $\beta i = 2i = \lambda_1$

$$t(A\cos 2t + B\sin 2t).$$

alors $x_p(t) = t(A\cos 2t + B\sin 2t)$

$$\dot{x}_p(t) = (A\cos 2t + B\sin 2t) + t(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

$$\ddot{x}_p(t) = 2(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + t(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t)$$

Par remplacement dans l'equ. non homogène on obtient ;

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{4}t\sin 2t$$

La solution general de l'equ. diff est :

$$x(t) = x_1(t) + x_p(t)$$

$$\boxed{x(t) = A_1\cos 2t + A_2\sin 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t}$$

③ • $\ddot{x} - x = 3e^{2t}\cos 2t$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

La solution de l'equ. homogène est :

$$x_1(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t}$$

Le deuxième membre de l'equ est de la forme $A e^{2t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$

avec $\beta i = 2i \neq \lambda_{1,2}$

La solution particulière a la forme suivante:

$$x_p(t) = e^{2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

$$\dot{x}_p(t) = e^{2t}\left((2A+2B)\cos 2t + (2B-2A)\sin 2t\right)$$

$$\ddot{x}_p(t) = 8e^{2t}(B\cos 2t - A\sin 2t)$$

On remplace dans l'equ non homogène:

$$8e^{2t}(B\cos 2t - A\sin 2t) - e^{2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) = 3e^{2t}\cos 2t$$

$$\begin{cases} A = 3/65 \\ B = -24/65 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = e^{2t}\left(\frac{3}{65}\cos 2t - \frac{24}{65}\sin 2t\right)$$

Alors la solution de l'equation non. homogène est:

$$x(t) = x_1(t) + x_p(t)$$

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t} + e^{2t}\left(\frac{3}{65}\cos 2t - \frac{24}{65}\sin 2t\right)}$$