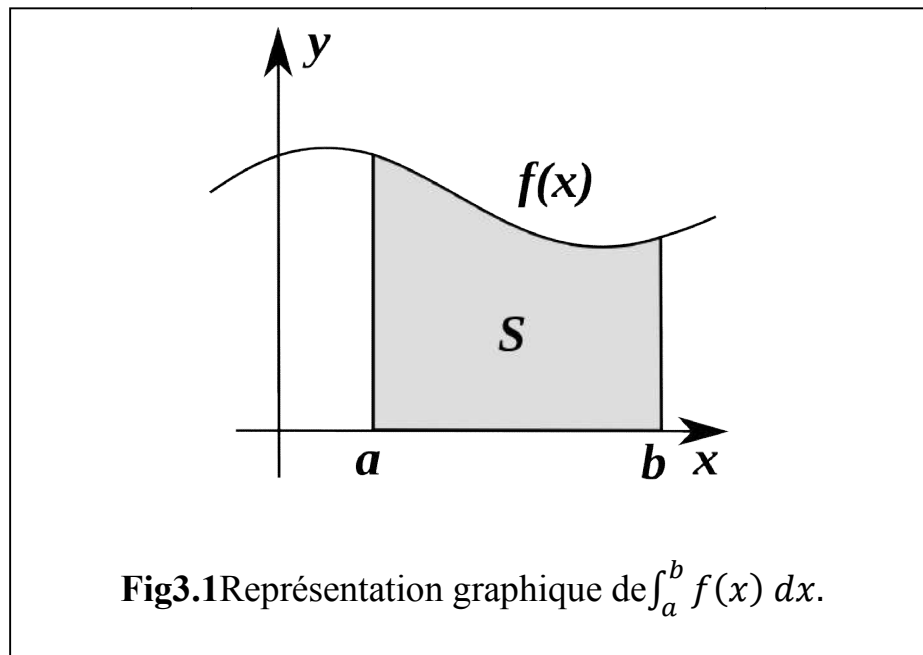


Chapitre 3

Intégration numérique.

3.1 Introduction :

L'intégration limitée d'une fonction $f(x)$ sur un domaine délimité par des bornes a et b est de faire calculer l'aire S comprise sous la courbe de a jusqu'à b (fig3.1).



Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée analytiquement. Cependant, ce n'est que très rarement possible, et le plus souvent un des cas suivants se présente :

- Le calcul analytique est long et compliqué.
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer.
- L'intégrale n'a pas d'expression analytique.

Dans tous ces cas, on préférera calculer numériquement la valeur de l'intégrale.

Aussi lorsque la fonction f n'est connue que par points, par exemple si elle résulte de mesures physique, on peut l'approcher alors par interpolation, Puis on intègre numériquement l'interpolé.

3.2 Formules de Newton Cotes :

On suppose que f est connue en $(n + 1)$ points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ équidistances, tels que :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \dots, \quad x_i = x_{i-1} + h = a + (i - 1)h$$

$$\text{et } x_{n+1} = x_n + h = a + nh = b$$

$$\text{On pose : } \int_{x_1-h}^{x_{n+1}+h} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) + h \dots \dots \dots (3.1)$$

Remarque :

- Si $h=1$, on dit que la formule (3.1) est de type ouvert.
- Si $h=0$, on dit que la formule (3.1) est de type fermé.

3.2.1 Formule de type fermé:

3.2.1.1 Formule du trapèze :

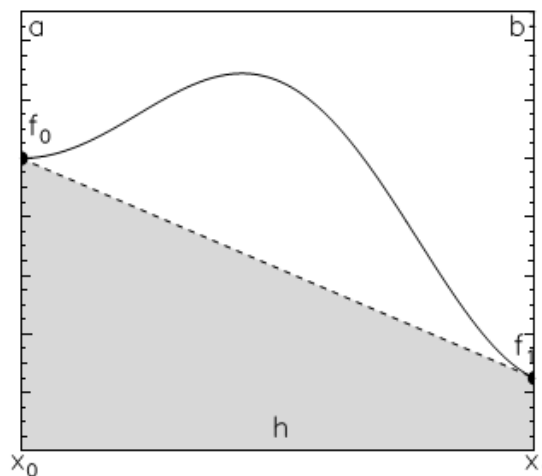


Fig 3.2 Représentation de la méthode du trapèze.

Pour approximer la fonction $f(x)$, cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 (la droite) qui passe par $f_0=f(x_0)$ et $f_1=f(x_1)$

$$P_1(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 - f_0}{b - a} \left(x - \frac{a + b}{2}\right)$$

L'intégrale approchée $I_1 = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx$ se calcule alors mathématiquement ou géométriquement et donne :

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} [f(x_0) + f(x_1)] ,$$

Il s'agit de l'aire du trapèze. Cette méthode nécessite deux évaluations de la fonction f (en a et en b).

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, on trouve alors pour $h = b - a$:

$$E_1 = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi) , \xi \in [x_0, x_1]$$

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \frac{(b - a)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

3.2.1.2 Formule de Simpson :

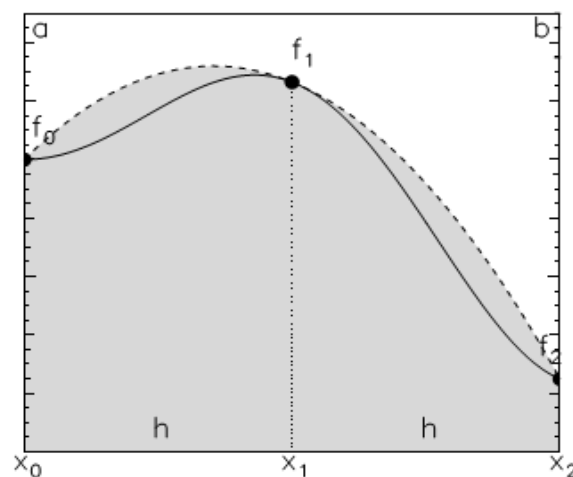


Fig3.3 Représentation de la méthode de Simpson

Pour approximer la fonction f , cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui passe par les trois points $f_0=f(x_0) = f(a)$, $f_1=f(x_1 = \frac{a+b}{2})$ et $f_2=f(x_2) = f(b)$

$$P_2(x) = 2 \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(x_2 - x_0)^2} (x - x_1)^2 + \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} (x - x_1) + f_1$$

L'intégrale approchée $I_2 = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx$ se calcule alors simplement et donne :

$$I_2 = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction $f(x)$ en

$$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } x_2 = b$$

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, on trouve alors pour $h = \frac{b-a}{2}$

$$E_2 = -\frac{h^3}{90} f^{(4)}(\xi) \text{ avec } \xi \in [x_0, x_2]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)] - \frac{h^3}{90} f^{(4)}(\xi)$$

3.2.1.3 Formule de Newton:

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi),$$

$$\xi \in [x_1, x_4]$$

3.2.2 Formule de type ouvert:

3.2.2.1.-Formule des Poncelet:

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = 2h f(x_2) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_3]$$

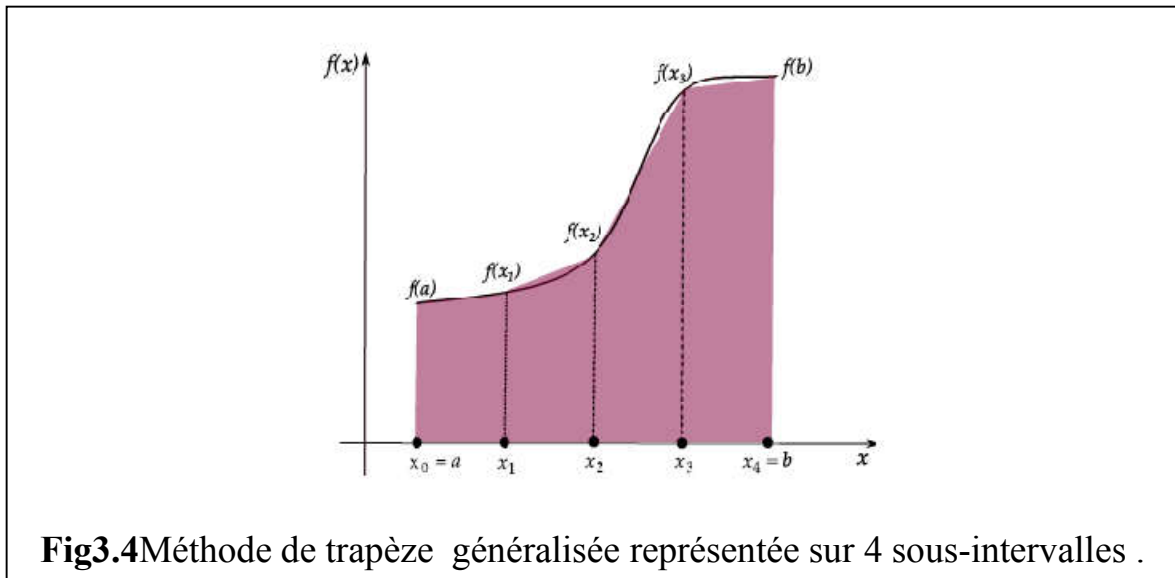
$$\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{2} [f(x_2) + f(x_3)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_4]$$

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = \frac{4h}{3} \left[2f(x_2) - f(x_3) + 2f(x_4) \right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_5]$$

Remarque

Les méthodes de Newton-Cotes simples ne permettent pas d'atteindre des précisions suffisantes sur des intervalles $[a, b]$ finis et ne sont donc jamais utilisées dans ce cas. Sauf lorsque $|b - a| \rightarrow 0$, et elles constituent alors la base élémentaire des méthodes généralisées présentées dans la section suivante.

3.3 Méthode de trapèze généralisée:



On considère une subdivision de $[a, b]$ en sous intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}]$

De bornes $x_i = a + ih, (i = 0, \dots, n), a = x_0, b = x_n$ et $h = \frac{b-a}{n}$

On suppose connues les valeurs $f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, n$.

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on remplace la fonction $f(x)$ par la droite

$$y = f(x_i) + (x - x_i) \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

L'aire exacte est donc remplacée par l'aire T_i du trapèze par conséquent en sommant les aires des n trapèzes de base $[x_i, x_{i+1}]$, ($i = 0, \dots, n$)

On obtient une approximation T_h de l'intégrale I comme $T_i = \frac{h}{2} [f(x_{i+1}) + f(x_i)]$

$$\text{Alors } I = \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] = T_h$$

L'erreur commise par la méthode de trapèze généralisée

L'erreur $E_h = I - T_h$ commise par application de cette méthode est donnée par:

$$E_h = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Donc si $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(t)|$.

$$\text{Alors: } |E_h| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

3.4 Méthode de Simpson généralisée:

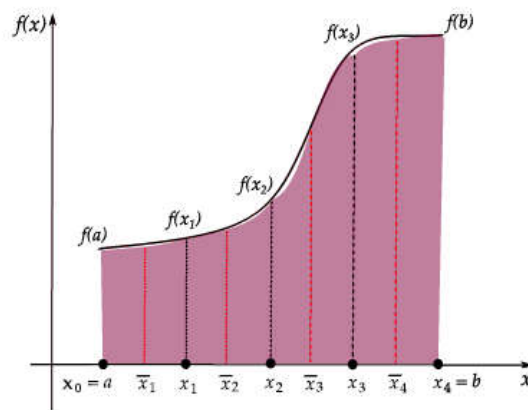


Fig 3.5 Méthode de Simpson généralisée représentée sur 4 sous-intervalles .

Dans cette méthode on suppose que n est paire (soit $n = 2s$). Puis on subdivise $[a, b]$ en s sous intervalles égaux $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, s-1$) de

longueur h , puis on remplace $f(x)$ sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ non pas par une droite comme dans les trapèzes, mais par une parabole ayant aux abscisses x_{i-1}, x_i et x_{i+1} les mêmes valeurs que f .

D'autre part la surface S_i , délimitée par cette parabole, les droites $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$ et l'axe des abscisses est :

$$S_i = \frac{h}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Ceci donne l'approximation de Simpson S_h de I , en sommant les aires S_i pour $i = 1$ à $n - 1$, finalement on obtient :

$$S_h = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_{2s}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2s-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2s-2}))]$$
 c'est à dire

$$S_h = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_{2s}) + 4 \sum_{k=1}^{2s-1} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=2}^{2s-2} f(x_{2k}) \right]$$

L'erreur commise par la méthode de Simpson généralisée

L'erreur $E_h = I - S_h$ commise par application de Simpson généralisée est donnée par:

$$E_h = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad , \xi \in [a, b]$$

Donc si $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(t)|$

$$\text{alors } |E_h| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$$

Remarque2 :

En général la méthode de Simpson donne une meilleure approximation que celle des trapèzes car l'erreur commise dans la méthode des trapèzes est

proportionnelle à h^2 , alors que pour Simpson elle est proportionnelle à h^4 , et comme par transformation de la variable d'intégration on peut toujours se ramener de $[a, b]$ à $[0, 1]$ et qu'alors $h \in [0, 1]$ où a donc $h^4 < h^2$

$$\text{Trapèzes} \rightarrow E \simeq \frac{b-a}{12} M_2 h^2$$

$$\text{Simpson} \rightarrow E \simeq \frac{b-a}{180} M_4 h^4$$

Exemple :

Déterminer par la méthode des trapèzes l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

1- Soit T l'approximation de I par la méthode des trapèzes, le pas h est donné

$$\text{par : } h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\pi/2}{4} = \pi/8$$

$$T = \frac{h}{2} [y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)]$$

$$= \frac{\pi}{16} [0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)] = 0.987116$$

2- Méthode de Simpson:

Soit S l'approximation de I par la méthode de Simpson celle-ci s'écrit :

$$s = \frac{h}{3} [y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2]$$

$$= \frac{\pi}{8} [0 + 1 + 4(0.382683 + 0.92388) + 2 \cdot 0.707107] = 1.000135$$

-Les points d'appui donnés dans cet exemple correspondent à la fonction $\sin x$ et

$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$, on constate donc que la différence entre S et I est :

$$|s - I| = 0.000135 < |T - I| = 0.012884$$