CHAPITRE III

Théorie de l'état de déformation

I- Introduction

On dit qu'un corps est déformé lorsqu'il y a changement des positions relatives des points de ce corps. Le cas le plus simple est celui d'une barre suspendue verticalement et soumise à un effort (F) sur ses deux extrémités **(figure 1)**

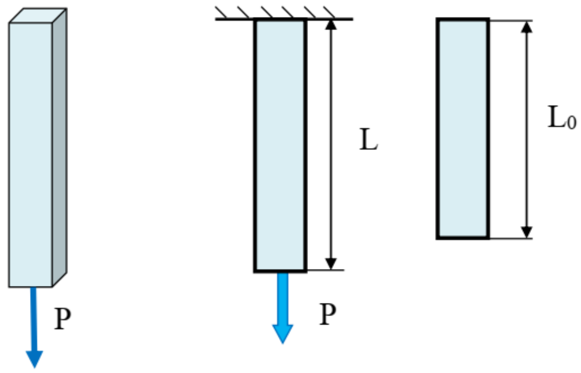

Figure 1. Barre soumise à son propre poids

Si on note par (L_0) sa longueur avant chargement et par (L) celle après déformation, alors la quantité ($\frac{L-L_0}{L}$) est appelée déformation longitudinale ou extension notée (ε) .Un autre type de déformation est celle reliée au changement de l'angle que fait entre eux les deux cotés d'un élément appelé généralement distorsion et notée (γ) **(figure 2).**

Figure 2. Exemple de déformation angulaire (distorsion)

II- Définition

On appelle déformation, un changement de distance entre deux points matériels d'un milieu continu, elle s'accompagne généralement d'un déplacement ainsi que d'un changement de forme.

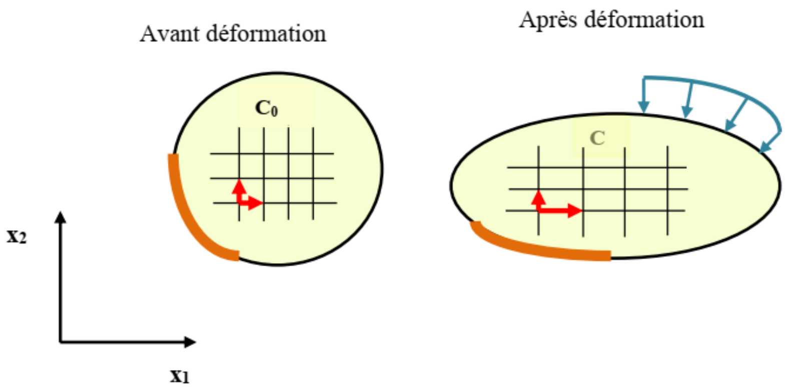

Figure3. Exemple de déformation d'un milieu continu

III- Exemple de déformations simples

Nous présentons ci-dessous quelques exemples de déformation de milieux continus :

- **Cisaillement simple :** cas d'une plaque sollicitée dans le plan $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ **(figure 4)**.

Les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases}$$

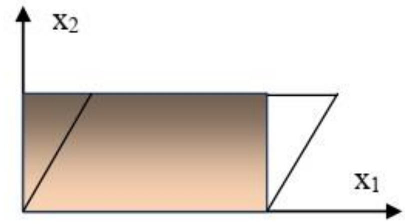

Figure 4. Cisaillement simple

- **déformation triaxiale homogène :** cas d'un cube en acier chauffé, celui-ci se dilate selon les trois directions $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ **(figure 5)**.

Les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = \lambda 1(t).X1 \\ x_2(t) = \lambda_2\,(t).X_2 \\ x_3(t) = \lambda_3(t).X_3 \end{cases}$$

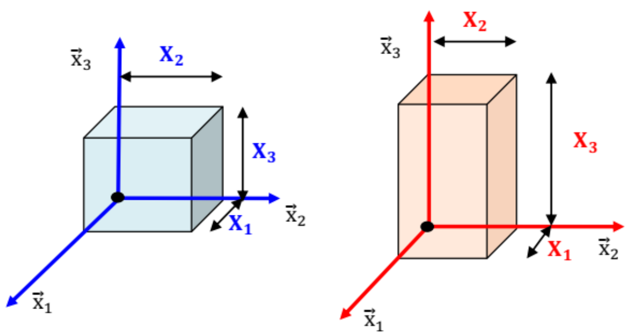

Figure 5. Déformation cubique d'un milieu continu

IV- Déplacement

Soit un milieu continu de configuration initiale (M0) et (M) à l'instant (t). Un point matériel (M) appartenant à ce milieu est positionné initialement par $\vec{R}$(à t = 0) et $\vec{r}$ (à l'instant (t)). Le vecteur déplacement noté $\vec{U}$ est donné par la relation :

$$\vec{U} = \vec{r} - \vec{R}$$

Ce vecteur peut être exprimé en coordonnées lagrangienne :

$$\vec{U} = \vec{U}\,(X_j, t)$$

Ou bien eulérienne :

$$\vec{u} = \vec{u}\,(x_j, t)$$

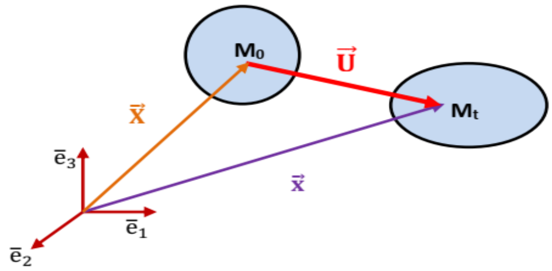

Figure 6. Vecteur déplacement

Application :

Pour le cas du cisaillement simple on se propose de déterminer les composantes du vecteur déplacement en coordonnées lagrangienne puis eulérienne.

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases}$$

Le vecteur de déplacement est donné par la relation vectorielle :

$$\vec{U} = \vec{r} - \vec{R}$$

Ou indicielle :

$U_i = x_i - X_i$

- **Coordonnées de Lagrange :** $U_i = U(X_i)$

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 = X_1 + b(t).X_2 - X_1 = b(t).X_2 \\ U_2 = x_2 - X_2 = X_2 - X_2 = 0 \\ U_3 = x_3 - X_3 = X_3 - X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{U} = \begin{pmatrix} b(t).X2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Coordonnées d'Euler :** $u_i = u(x_i)$

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X_1 = x_1 - b(t).x_2 \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = x_1 - X_1 = x_1 - (x_1 + b(t).X_2) = b(t).X_2 \\ u_2 = x_2 - X_2 = x_2 - x_2 = 0 \\ u_3 = x_3 - X_3 = x_3 - x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{U} = \begin{pmatrix} b(t).X2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V- Gradient de déformation

Pour exprimer le gradient de déformation, considérons un voisinage V(x) d'un point matériel, positionné par (x) et appartenant à un milieu continu ; soit (y) un point appartenant au voisinage de V(x) et proche de (x) **(figure 7)**. Le déplacement à l'intérieur de V(x) peut être représenté par un développement en série de Taylor de la vectrice position $\vec{r} = r$ (t).

$$\begin{cases} x_i = x_i\,(X_j,t) \\ y_i = x_i + \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{cases}$$

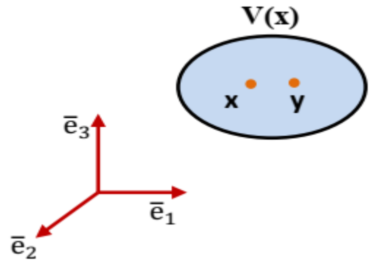

Figure 7. Voisinage d'un point matériel

On définit le tenseur gradient de la transformation d'ordre deux, appelé aussi application linéaire tangente qui sert au transport matériel d'un vecteur de la configuration (C_0) à la configuration (C_t) par :

$$[F] = F_{ij} = \frac{\partial xi}{\partial Xj}$$

Ce tenseur qui fait grand usage dans l'étude des grandes transformations est une quantité très importante dans la description des déformations d'un milieu continu. Il permet de relier la position relative de deux particules avant et après déformation. On définit le tenseur gradient de la transformation inverse $[F]^{-1}$ par :

$$[F]^{-1} = F_{ij}^{-1} = \frac{\partial Xi}{\partial xj}$$

- **Application**

Une dilatation uniforme est représentée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = a(t).X_1 \\ x_2(t) = a(t).X_2 \\ x_3(t) = a(t).X_3 \end{cases}$$

On se propose de déterminer les composantes du tenseur gradient de cette transformation. Tenseur gradient de déformation :

$$F_{ij} = \frac{\partial xi}{\partial Xj} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x1}{\partial X1} & \frac{\partial x1}{\partial X2} & \frac{\partial x1}{\partial X3} \\ \frac{\partial x2}{\partial X1} & \frac{\partial x2}{\partial X2} & \frac{\partial x2}{\partial X3} \\ \frac{\partial x3}{\partial X1} & \frac{\partial x3}{\partial X2} & \frac{\partial x3}{\partial X3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

VI- Relation entre le vecteur déplacement et le gradient de déformation

On cherche à trouver une relation entre le tenseur gradient de déformation et le vecteur déplacement donné par la relation $\vec{U} = \vec{r} - \vec{R}$. En écriture indicielle le vecteur déplacement est donné par la relation suivante :

$$U_i = x_i - X_i$$

Si on dérive cette expression par rapport à Xj on obtient :

$$\frac{\partial Ui}{\partial Xj} = \frac{\partial xi}{\partial Xj} - \frac{\partial Xi}{\partial Xj}$$

Sachant que :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial Xi}{\partial Xj} = 1 \quad Si \quad i = j \\ \frac{\partial Xi}{\partial Xj} = 0 \quad Si \quad i \neq j \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial Xi}{\partial Xj} = \delta_{ij}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial Ui}{\partial Xj} = \frac{\partial xi}{\partial Xj} - \frac{\partial Xi}{\partial Xj} = \frac{\partial xi}{\partial Xj} - \delta ij = Fij - \delta ij$$

Ce qui conduit finalement à :

$$Fij = \frac{\partial Ui}{\partial Xj} + \delta ij$$

VII- Tenseurs de déformation

Pour définir quelques tenseurs de déformation on considère la déformation d'un petit élément linéaire (vecteur) de cordonnées (dX_i), celui-ci subit une déformation et devient (dx_i) **(figure 8).**

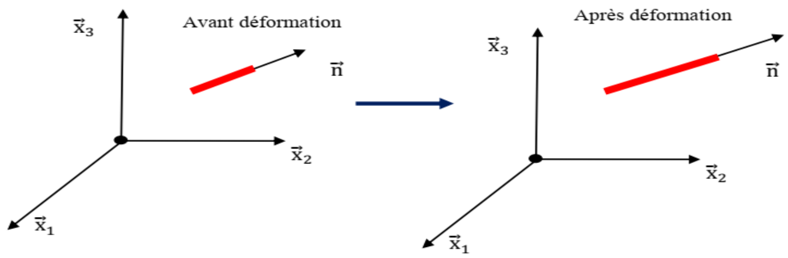

Figure 8. Déformation d'un élément

Si l'on ne considère que les petites déformations, l'état des déformations en un point M est complètement caractérisé par le tenseur symétrique ε et la relation donnant le déplacement un point M du milieu et pour une direction en *n* :

$$u\,(M, n) = \varepsilon(M).n$$

La connaissance des vecteurs déplacements au point M pour trois vecteurs unitaires définis par la base (e_1, e_2, e_3) suffit à déterminer l'état des déformations en ce point :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1\,(M, e_1) = \varepsilon_{11}e_1 + \varepsilon_{21}e_2 + \varepsilon_{31}e_3 \\ u_2\,(M, e_2) = \varepsilon_{12}e_1 + \varepsilon_{22}e_2 + \varepsilon_{32}e_3 \\ u_3\,(M, e_3) = \varepsilon_{13}e_1 + \varepsilon_{23}e_2 + \varepsilon_{33}e_3 \end{array}\right.$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Notons (dS) et (ds) les longueurs respectives des vecteurs (dX_i) et (dx_i) alors :

$$dS^2 = dS_i.\, dS_j = \vec{dS}.\, \vec{dS} = dX_{m,i}.\, dX_{m,j} = (\partial X_m/\partial x_i)\, dx_i.\, (\partial X_m/\partial x_j)\, dx_j = (\partial X_m/\partial x_i).\, (\partial X_m/\partial x_j)\, dx_i.\, dx_j$$

Ceci permet de définir le tenseur de déformation dit tenseur de Cauchy-Green gauche :

$$[c] = c_{ij} = (\partial X_m/\partial x_i).\, (\partial X_m/\partial x_j) = [F^{-1}]^T\, [F^{-1}]$$

Ce qui nous donnera

$$dS^2 = c_{ij}.\, dx_i \,.\, dx_j$$

Cette relation permet de donner la longueur initiale de l'élément avant déformation en fonction du tenseur de Cauchy-Green gauche et des longueurs de l'élément après déformation

Nous avons aussi :

$$ds^2 = ds_i.\, ds_j = \overrightarrow{ds}.\, \overrightarrow{ds} = dx_{m,i}.\, dx_{m,j} = (\partial x_m/\partial X_i)\, dX_i.\, (\partial x_m/\partial X_j)\, dX_j = (\partial x_m/\partial X_i).\, (\partial x_m/\partial X_j)\, dX_i.\, dX_j$$

Ceci qui permet de définir le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit :

$$[C] = C_{ij} = (\partial x_m/\partial X_i).\, (\partial x_m/\partial X_j) = [F]^T [F]$$

Ce qui nous donnera

$$ds^2 = C_{ij}.\, dX_i \,.\, dX_j$$

Cette relation exprime la longueur de l'élément après déformation en fonction du tenseur de Green-Cauchy droit et de la longueur de l'élément avant déformation.

Le tenseur des déformations – plus précisément le "tenseur de Green-Lagrange des déformations" – est défini par :

$$E_{ij} = 1/2(C_{ij} - \delta_{ij})$$

Le tenseur des déformations – plus précisément le "tenseur d'Euler-Almansi des déformations" – est défini par :

$$e_{ij} = 1/2(\delta_{ij} - c_{ij})$$

4.8 Relation entre le tenseur de déformation et le vecteur déplacement

Exprimons le tenseur de déformation de Lagrange Eij et celui d'Euler-Almansi eij en fonction du vecteur déplacement $\overrightarrow{U}$.

Sachant que :

$$2.\, E_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij} = [(\partial x_m/\partial X_i).\, (\partial x_m/\partial X_j)] - \delta_{ij}$$

Et :

$$F_{ij} = \partial x_i/\partial X_j = \delta_{ij} + (\partial U_i/\partial X_j)$$

Alors :

$$2.\, E_{ij} = (\delta_{mi} + \partial U_m/\partial X_i) \,.\, (\delta_{mj} + \partial U_m/\partial X_j) - \delta_{ij}$$

Ce qui implique que :

$$2.\, E_{ij} = \delta_{mi}.\, \delta_{mj} + \delta_{mi}.(\partial U_m/\partial X_j) + \delta_{mj}.(\partial U_m/\partial X_i) + [(\partial U_m/\partial X_i).(\partial U_m/\partial X_j)] - \delta_{ij}$$

Ce qui conduit à :

$$2.\, E_{ij} = \delta_{ij} + (\partial U_i/\partial X_j) + (\partial U_j/\partial X_i) + [(\partial U_m/\partial X_i).(\partial U_m/\partial X_j)] - \delta_{ij}$$

Ce qui implique que :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Ui}{\partial Xj} + \frac{\partial Uj}{\partial Xi} + \frac{\partial Um}{\partial Xi} \,.\, \frac{\partial Um}{\partial Xj}\right)$$

Le même raisonnement conduit une relation entre le tenseur de déformation d'Euler-Almansi eij et le vecteur déplacement $\vec{U}$:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial ui}{\partial xj} + \frac{\partial uj}{\partial xi} + \frac{\partial um}{\partial xi} \cdot \frac{\partial um}{\partial xj}\right)$$

Application 1 : Déterminer les tenseurs de déformation : Fij , FijT, FijT. Fij et Cij pour le cas du cisaillement simple. Que peut-on conclure ?

- Les équations du cisaillement simple :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases}$$

- Calcul du tenseur de déformation F_{ij} :

$$F_{ij} = \frac{\partial xi}{\partial Xj} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x1}{\partial X1} & \frac{\partial x1}{\partial X2} & \frac{\partial x1}{\partial X3} \\ \frac{\partial x2}{\partial X1} & \frac{\partial x2}{\partial X2} & \frac{\partial x2}{\partial X3} \\ \frac{\partial x3}{\partial X1} & \frac{\partial x3}{\partial X2} & \frac{\partial x3}{\partial X3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcul du tenseur de déformation F_{ij}^T:

$$F_{ij}^T = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcul du tenseur de déformation $F_{ij}^T . F_{ij}$:

$$F_{ij}^T . F_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1+b2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcul du tenseur de déformation C_{ij} :

$$Cij = \frac{\partial Um}{\partial Xi} . \frac{\partial Um}{\partial Xj}$$

i=1 j=1 m=1,2,3

$$C_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}.\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}.\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 1$$

i=1 j=3 m=1,2,3

$$C_{13} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}.\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}.\frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 0$$

i=2 j=3 m=1,2,3

$$C_{23} = \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_2}{\partial X_2}.\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2}.\frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 0$$

i=3 j=2 m=1,2,3

$$C_{32} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_3}.\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_3}.\frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0$$

i=3 j=1 m=1,2,3

$$C_{31} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_3}.\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial x_3}{\partial X_3}.\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0$$

i=1 j=2 m=1,2,3

$$C_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}.\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}.\frac{\partial x_3}{\partial X_2} = b$$

i=2 j=2 m=1,2,3

$$C_{22} = \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_2}.\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2}.\frac{\partial x_3}{\partial X_2} = b^2 + 1$$

i=2 j=1 m=1,2,3

$$C_{21} = \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_2}.\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2}.\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = b$$

i=3 j=3 m=1,2,3

$$C_{33} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_2}{\partial X_3}.\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_3}.\frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1$$

Alors : $Cij = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1+b2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut conclure que : $C_{ij} = F_{ij}^T . F_{ij}$

Application 2 : pour ce même cas, déterminer les tenseurs de déformation de Lagrange E_{ij} et d'Euler-Almansi e_{ij}.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$$

Sachant que : $C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1+b2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1+b2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Les équations du cisaillement simple en coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} X_1(t) = x_1 - b(t).x_2 \\ X_2(t) = x_2 \\ X_3(t) = x_3 \end{cases}$$

$$c_{ij} = (F_{ij}^{-1})^{T.}(F_{ij}^{-1})$$

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial Xi}{\partial xj} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X1}{\partial x1} & \frac{\partial X1}{\partial x2} & \frac{\partial X1}{\partial x3} \\ \frac{\partial X2}{\partial x1} & \frac{\partial X2}{\partial x2} & \frac{\partial X2}{\partial x3} \\ \frac{\partial X3}{\partial x1} & \frac{\partial X3}{\partial x2} & \frac{\partial X3}{\partial x3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(F_{ij}^{-1})^T = \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (F_{ij}^{-1})^{T.}(F_{ij}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ -b & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ -b & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -b & 0 \\ -b & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut conclure que les tenseurs : C_{ij}, c_{ij}, E_{ij}, e_{ij} sont des tenseurs symétriques.

VIII- Hypothèses des petits déplacements

Si on néglige les termes non linéaires dans l'expression des tenseurs de Lagrange et d'Euler Almansi, on obtient les tenseurs de déformations infinitésimales.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Ui}{\partial Xj} + \frac{\partial Uj}{\partial Xi}\right) \qquad \text{et :} \qquad e'_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial ui}{\partial xj} + \frac{\partial uj}{\partial xi}\right)$$

IX- Variation de longueur

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{dS_0}$ et $\overrightarrow{dS'_0}$ qui sont déformés suivants deux directions $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Après déformations ces deux vecteurs deviennent respectivement $\overrightarrow{ds}$ et $\overrightarrow{ds'}$ **(figure 9)**

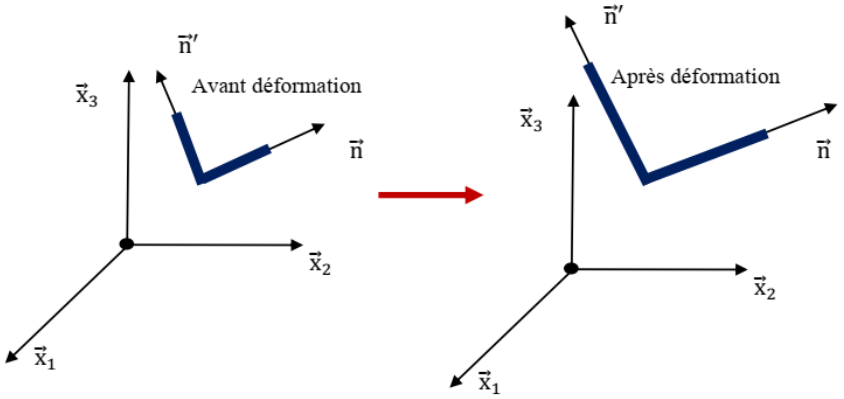

Figure 9. Déformation d'un élément (variation de longueur)

On suppose que les déformations sont des dilatations pures

Nous avons :

$$\overrightarrow{dS_0} = dS_0.\,\vec{n} = \overrightarrow{dX_i}$$

Et :

$$\overrightarrow{dS'_0} = dS'_0.\,\vec{n}' = \overrightarrow{dX_j}$$

Si on suppose que $\overrightarrow{dS_0} = \overrightarrow{dS'_0}$ et $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{ds'}$

Alors :

$$\overrightarrow{ds}.\,\overrightarrow{ds} - \overrightarrow{dS_0}.\,\overrightarrow{dS'_0} = ds^2 - dS_0^2 = 2E_{ij}dX_idX_j = 2E_{ij}.\,ds_0.\,ni.ds_0.\,n_j = 2E_{ij}ds_0^2n_i.\,n_j$$

Donc :

$$(ds^2 - dS_0^2)/ds_0^2 = 2E_{ij}n_i.\,n_j$$

Le tenseur de déformation de Lagrange permet de calculer la variation relative des carrés de longueur d'un vecteur infiniment petit d'orientation quelconque.

Cas particulier : L'allongement ou dilatation dans la direction $\overrightarrow{(n)}$ la quantité $\varepsilon\overrightarrow{(n)}$ est le rapport de la variation de la longueur d'un vecteur matériel ($ds - dS_0$) dirigé selon la direction $\overrightarrow{(n)}$ à sa longueur initiale.

$$\varepsilon\overrightarrow{(n)} = \frac{ds - dS_0}{dS_0}$$

Cela nous donne :

$$ds = dS_0\,(1 + \varepsilon\overrightarrow{(n)})$$

On a aussi :

$$ds^2 = dS_0^2\,(1 - 2E_{ij}n_i.\,n_j)$$

A partir des deux dernières relations on peut écrire :

$$ds = dS_0\sqrt{1 - 2E_{ij}n_i.\,n_j} = dS_0\,(1 + \varepsilon\overrightarrow{(n)})$$

Alors :

$$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \sqrt{(1 + 2E_{ij}n_i.\, n_j)} - 1$$

X- Variation de volume

Soit (V_0) le volume initial d'une particule et soit (V) son volume final, sachant que :

$$V = V_0.\, J$$

J représente le Jacobien de la transformation.

$$J = \det(\partial xi/\partial Xj) = \det(Fij)$$

Appelons (ϑ) la variation relative du volume (V)

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{J.V_0 - V_0}{V_0} = J - 1$$

Alors :

$$\theta = \det(F_{ij}) - 1$$

XI- Interprétation du tenseur des déformations infinitésimales

XI-1. Eléments de la diagonale

Considérons un élément ($\overrightarrow{dX}$) de longueur initiale (dS_0) qui après déformation devient ($\overrightarrow{dx}$) de longueur (ds). Sachant que la dilatation linéaire est donnée par la relation suivante :

$$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \frac{ds - dS_0}{dS_0}$$

Et d'autre part nous avons d'après la relation :

$$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \sqrt{(1 + 2E_{ij}n_i.\, n_j)} - 1 = (1 + 2E_{ij}n_i.\, n_j)^{1/2} - 1$$

Dans le cas des petites déformations, le tenseur de déformation Eij est dit tenseur de déformation infinitésimal et on peut écrire que : $Eij = \varepsilon ij$

Alors si on utilise l'hypothèse des petites approximations on obtient :

$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = (1 + 2E_{ij}n_i.\, n_j)^{1/2} - 1 = 1 + (1/2).\, 2.\, E_{ij}n_i.\, n_j - 1 = (\varepsilon)\, E_{ij}n_i.\, n_j$

Et enfin nous avons :

$$\varepsilon(\overrightarrow{n}) = \varepsilon_{ij}n_i.\, n_j = [\overrightarrow{n}]^T.\, [\varepsilon].\, [\overrightarrow{n}]$$

ε_{ij} représente la déformation d'un élément suivant l'axe $\overrightarrow{X_i}$

<u>Application :</u>

Calculons la déformation suivant la direction $\overrightarrow{X_1}$ de normale unitaire le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_1}$.

$$\varepsilon(\overrightarrow{e_1}) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon 11$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon(\overrightarrow{e_1}) = \varepsilon_{11} = \partial U_1/\partial X_1$$

De même :

$$\varepsilon(\overrightarrow{e_2}) = \varepsilon_{22} = \partial U_2/\partial X_2 \qquad \text{Et :} \qquad \varepsilon(\overrightarrow{e_3}) = \varepsilon_{33} = \partial U_3/\partial X_3$$

XI-2. Eléments non diagonaux du tenseur de déformation :

Soient deux vecteurs infinitésimaux (MN1) et (MN2) tels qu'à l'état non déformé :

$\overrightarrow{MN_1} = \overrightarrow{e_1}.\ dx_1$

Et :

$\overrightarrow{MN_2} = \overrightarrow{e_2}.\ dx_2$

Après déformation les points (M), (N1) et (N2) deviennent respectivement (M'), (N'1) et (N'2) **(figure 10)**.

Nous avons :

$\overrightarrow{M'N'_1} = \overrightarrow{MN_1} + \overrightarrow{d_1U}(M)$

Sachant que d'après la **(figure 10)** nous avons :

$\overrightarrow{d_1U}(M) = (\partial U_1/\partial X1).dx1.\overrightarrow{e_1} + (\partial U_2/\partial X1).dx2.\overrightarrow{e_2}$

$(\partial U_1/\partial X_1).dx_1 = \varepsilon_{11} dx_1$

Cette quantité représente l'allongement de (MN_1) suivant la direction $\overrightarrow{e_1}$ et ε_{11} l'allongement unitaire au point (M) dans la direction $\overrightarrow{e_1}$.

De même :

$\overrightarrow{M'N'_2} = \overrightarrow{MN_2} + \overrightarrow{d_2U}(M)$

Et :

$\overrightarrow{d_2U}(M) = (\partial U_1/\partial X2).dx1.\overrightarrow{e_1} + (\partial U_2/\partial X2).dx2.\overrightarrow{e_2}$

$(\partial U_2/\partial X_2).dx_2 = \varepsilon_{22} dx_2$

Cette quantité représente l'allongement de (MN_2) suivant la direction $\overrightarrow{e_2}$ et ε_{22} l'allongement unitaire au point (M) dans la direction $\overrightarrow{e_2}$.

L'angle (γ_1) entre les directions (MN_1) et ($M'N'_1$) avant et après déformation est donné par la relation :

$$\text{tg}\ \gamma_1 = \frac{\frac{\partial U2}{\partial X1}\, dx2}{dx1 + \frac{\partial U1}{\partial X1} dx1}$$

Dans le cas des petites déformations on peut utiliser les approximations suivantes :

$dx_1 \backsimeq dx_2$ et $1 + (\partial U_1/\partial X_1) \backsimeq 1$.

Ainsi la relation devient :

$$\text{tg}\ \gamma_1 = \frac{\frac{\partial U2}{\partial X1}\, dx2}{dx1 + \frac{\partial U1}{\partial X1} dx1} = \frac{\frac{\partial U2}{\partial X1}}{1 + \frac{\partial U1}{\partial X1}} \backsimeq \partial U_2/\partial X_1$$

Finalement on obtient :

$$\gamma_1 = \partial U_2/\partial X_1$$

Et

$$\gamma_2 = \partial U_1/\partial X_2$$

On en déduit que l'angle qui est égal à $(\pi/2)$ avant déformation est diminué après déformation d'un angle :

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 = \partial U_2/\partial X_1 + \partial U_1/\partial X_2 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$$

Dans cette relation ε_{12} représente la moitié de la déformation au point (M) entre (MN1) et (MN2) ou encore déformation de cisaillement entre les directions $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

Finalement, les 9 quantités obtenues constituent les composantes du tenseur de déformation, dans le cadre d'une théorie de petites déformations. Ce tenseur est un tenseur d'ordre 2 symétrique et s'écrit sous forme matricielle :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Les composantes de ce tenseur sont déterminées à partir de la relation $\varepsilon_{ij} = 1/2(\partial U_i/\partial X_j + \partial U_j/\partial X_i)$ **:**

Les éléments diagonaux

$$\varepsilon_{11} = \partial U_1/\partial X_1 \qquad \varepsilon_{22} = \partial U_2/\partial X_2 \qquad \varepsilon_{33} = \partial U_3/\partial X_3$$

Les éléments non diagonaux

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 1/2[(\partial U_1/\partial X_2) + (\partial U_2/\partial X_1)]$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 1/2[(\partial U_1/\partial X_3) + (\partial U_3/\partial X_1)]$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 1/2[(\partial U_2/\partial X_3) + (\partial U_3/\partial X_2)]$$

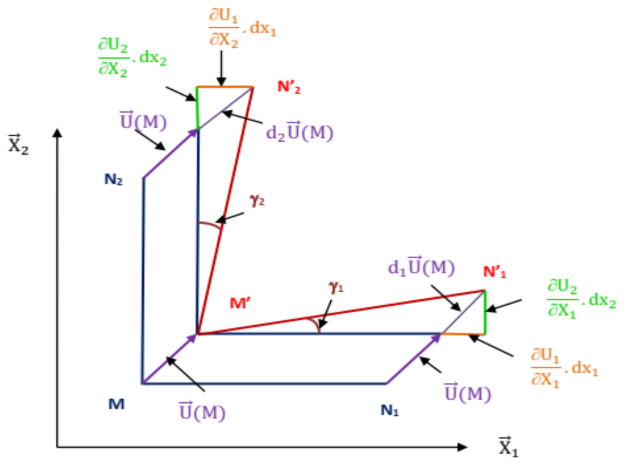

Figure10. Eléments non diagonaux du tenseur de déformation

XII- Tenseur de rotation

Considérons un petit élément cubique qui subit un déplacement (MM′) sans se déformer **(figure 11)**. Les composantes du tenseur de déformation (ε_{ij}) ne sont pas suffisantes pour définir la nouvelle position de cet élément. Il serait donc nécessaire de prendre en considération la rotation rigide de l'élément, autour des axes $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3})$ dont les composantes sont notées : ω_{12}, ω_{21}, ω_{13}, ω_{31}, ω_{23}, ω_{32}

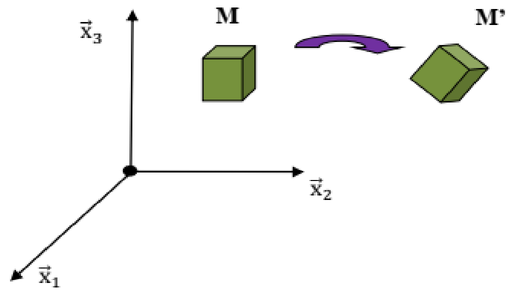

Figure 11. Rotation rigide d'un solide

Pour exprimer les composantes du tenseur de rotation en fonction des composantes du vecteur déplacement : U_1, U_2, U_3 considérons le cas plan de la figure ci-dessous :

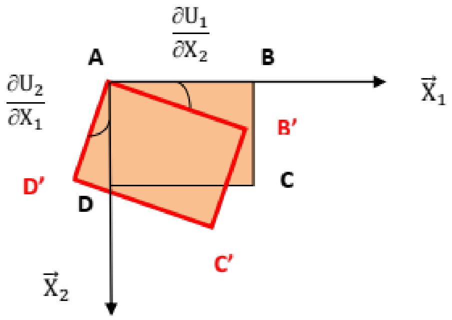

Figure12. Rotation rigide dans un plan

Si U_1 et U_2 sont les composantes du vecteur déplacement, l'angle de rotation est égal à $(\partial U_1/\partial X_2)$ ou $(- \partial U_2/\partial X_1)$ ainsi la rotation est complètement définie par la relation suivante :

$$\omega_{12} = 1/2[(\partial U_1/\partial X_2) - (\partial U_2/\partial X_1)]$$

D'une manière générale nous avons :

$$\omega_{ij} = 1/2(\partial U_i/\partial X_j - \partial U_j/\partial X_i)$$

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

1. Le tenseur de rotation ω_{ij} est antisymétrique.

2. Les éléments de la diagonale de ce tenseur ω_{ij} sont nuls.

3. Le tenseur $(\partial U_i/\partial X_j)$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui peut être exprimé comme étant la somme d'un tenseur symétrique et autre anti symétrique tel que :

$$\partial U_i/\partial X_j = 1/2(\partial U_i/\partial X_j + \partial U_j/\partial X_i) + 1/2(\partial U_i/\partial X_j - \partial U_j/\partial X_i) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

4. Le trace du tenseur (ε_{ij}) est définit par la quantité (θ) qui représente la somme des déformations longitudinales. Cette quantité qui exprime la variation par unité de volume est aussi appelée dilatation cubique.

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \partial U_1/\partial X_1 + \partial U_2/\partial X_2 + \partial U_3/\partial X_3 = \text{div}\,(\vec{U})$$

5. Si le tenseur de déformation est connu, les déformations principales ainsi que les directions principales associées, sont déterminés de la même manière que celle des contraintes principales et cela en passant par la résolution de l'équation caractéristique :

$$\det (\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij})$$

L'état des déformations étant représenté par une matrice symétrique à coefficients réels, on montre que dans le cas général il existe trois directions (E1, E2, E3) pour lesquelles il n'existe pas de distorsion. Le tenseur des déformations est représenté dans cette base par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon 2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon 3 \end{pmatrix}$$

ε_1, ε_2, ε_3 sont les valeurs principales de la matrice des déformations associées aux directions principales E_1, E_2, E_3.

6. *Cercle de Mohr des déformations*

Nous allons, comme dans le cas des contraintes, établir que la déformation et la distorsion pour la famille de facettes passant par une direction principale (par exemple *E*3) définissent un cercle dans le plan de Mohr des déformations.

Soit *n* la normale en M à l'une des facettes précédemment définies :

$$n = \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2$$

$$t = -\sin\theta E_1 + \cos\theta E_2$$

Et avec n.t= 0

Nous reconnaissons ici l'équation d'un cercle associé aux variables ε_n et γ_{nt}. Lorsque la valeur de θ varie, le point de coordonnée (ε_n, $\gamma_{nt}/2$) décrit dans le plan (ε_n, $\gamma_{nt}/2$) un cercle de centre $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$ et de rayon $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$.

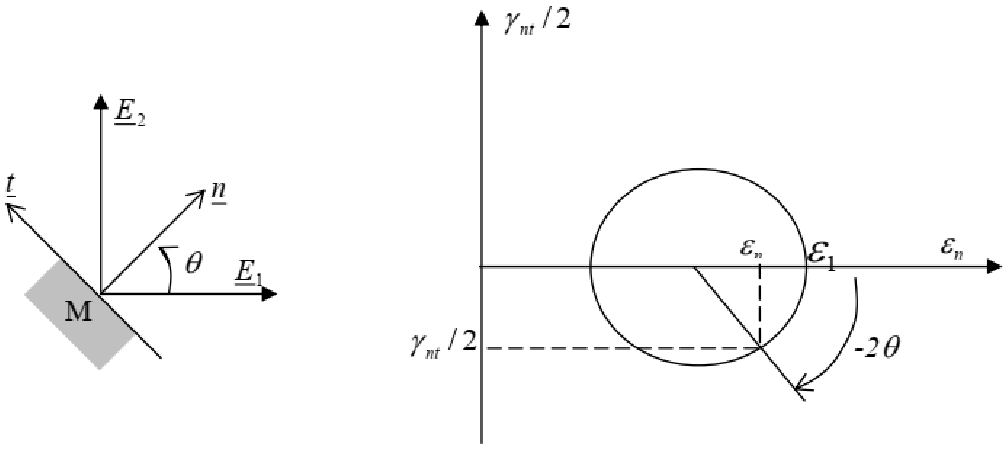

Figure13. Cercle de Mohr des déformations