CHAPITRE IV : DYNAMIQUE DES FLUIDES RÉELS :

L'écoulement d'un *fluide réel* est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes et provoquant une perte d'énergie mécanique. Nous allons mettre en évidence les différents éléments provoquant cette perte d'énergie.

IV.1. Equation de l'hydrodynamique des liquides réels " Équation de Navier Stokes".

La dérivation ce fait ici selon la direction z; pour les autres directions (x et y), elle s'effectue de façon analogue.

Considérons un parallélépipède élémentaire d'un liquide qui se déplace (Fig. IV.1).

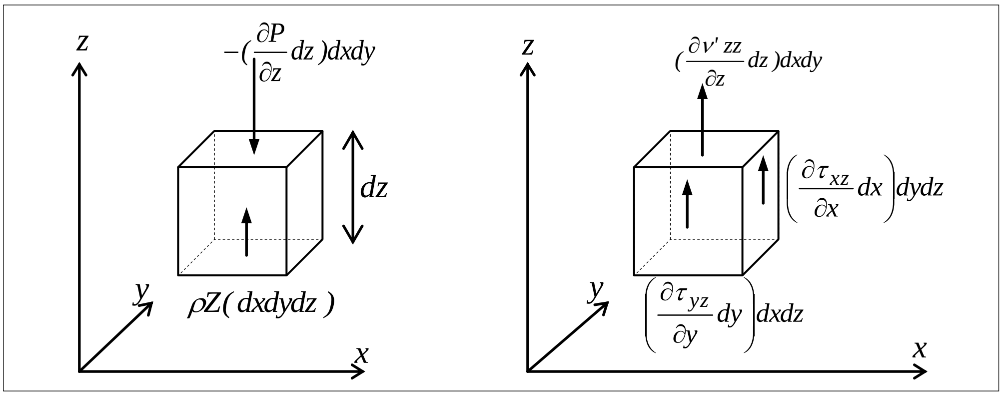

Fig. IV.1

Les forces qui agissent sur cet élément de volume (*dx dy dz*), sont :

- Force de volume : $\rho Z(dxdydz)$.
- Force de pression: $-(\frac{\partial P}{\partial z} dz)dxdy$.
- Force de viscosité ou de frottement:

$$(\frac{\partial \sigma' zz}{\partial z} dz)dxdy + (\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx)dydz + (\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy)dxdz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV.1}$$

- Force d'inertie (accélération): $\rho \frac{dw}{dt}(dxdydz)$.

Où

w : est la composante de la vitesse $\vec{V}(u,v,w)$ selon l'axe des z;

$\sigma' zz$: La composante normale de la tension de frottement ;

τ_{xz} et τ_{yz} : Les composantes tangentielles de la tension de frottement.

La loi de viscosité selon Newton $(\tau = \mu \frac{dv}{dz})$ pour un écoulement incompressible unidimensionnel et laminaire, peut être généralisée pour un écoulement tridimensionnel.

$$\left.\begin{cases} \sigma'_{zz} = \mu(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}) \quad \text{Et} \quad \sigma_{zz} = -P + \nu'_{zz} \\ \tau_{xz} = \mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \tau_{yz} = \mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \end{cases}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{IV.2}$$

Avec les relations exprimées par le système (IV.2), la force nette de la viscosité par volume unitaire donné par l'équation (IV.1) , on obtient:

$$2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) + \mu \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})$$

En regroupant ces termes, on obtient:

$$\mu\underbrace{(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})}_{\nabla^2 \omega} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})}_{\text{II}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV.3}$$

Le deuxième terme (II) exprime la continuité de l'écoulement. Pour un écoulement incompressible et conservatif, il est nul. La force nette de la viscosité qui est dissipative, et alors:

$$\mu \nabla^2 \omega (dxdydz).$$

La masse restant constante, l'ensemble des forces satisfait à l'équation de Newton:

$$\sum \textit{Forces} = \textit{masses} \times \textit{accélérations}$$

La condition d'équilibre des forces selon l'axe z permet d'écrire:

$$\mu \nabla^2 w(dxdydz) - (\frac{\partial P}{\partial z} dz) dxdy + \rho Z(dxdydz) = \rho \frac{dw}{dt}(dxdydz) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV.4}$$

Ou par unité de volume:

$$\mu \nabla^2 w - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{dw}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV.5}$$

5. La condition d'équilibre des forces selon les autres directions peut être écrite de manière identique et puis sous la forme vectorielle:

$$\left.\begin{aligned}\rho X-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=\rho\frac{\partial u}{\partial t}\\ \rho Y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=\rho\frac{\partial v}{\partial t}\\ \rho Z-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\nabla^2 w=\rho\frac{\partial w}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$ Où $\rho\vec{F}-gr\vec{a}dP+\mu\nabla^2\vec{V}=\rho\frac{d\vec{V}}{dt}$, On devise par ρ on obtient :

$$\frac{1}{\rho}gr\vec{a}dP=\vec{F}-\vec{a}+\nu\nabla^2\vec{V}\text{......IV.6}$$

Cette équation (IV.6) est appelée *équation générale de la dynamique des liquides réels ou équation de Navier Stokes*. Elle est valable pour les écoulements laminaires d'un fluide incompressible.

Sous la forme vectorielle l'équation de Navier Stokes exprime :

$\frac{1}{\rho}gr\vec{a}dP$: Force de pression

$\vec{F}$: Force extérieure (de volume) ou massique.

$\vec{a}$: Force d'inertie résultante du mouvement

$\nu\nabla^2\vec{V}$: Force de viscosité.

- Si $\nu=0\Rightarrow$ on trouve l'équation d'Euler pour les liquides parfaits ;
- Si $\nu=0$ et $\vec{a}=0\Rightarrow$ on trouve l'équation fondamentale de l'hydrostatique.

IV.1.1 *Intégration des équations de Navier stokes dans le cas d'un écoulement monodimensionnel* :

Appliquons l'équation de Navier-stokes à une particule de liquide soumis à la seule action de pesanteur X = 0, Y = 0, Z = -g, on obtient :

$$\frac{1}{\rho}dP=-gdz-\vec{V}dv+\nu\nabla^2\vec{V}$$

$$\frac{1}{\rho}dP+gdz+Vdv-\nu(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)=0$$

En intégrant le long de la trajectoire de la particule liquide considérée:

$$\frac{P}{\rho}+g.z+\frac{V^2}{2}-\nu\int(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)=Cte$$

On divise par g:

$$\frac{P}{\varpi}+z+\frac{V^2}{2g}-\frac{\nu}{g}\int(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)=H\text{............IV.7}$$

Le Laplacien de la vitesse a les mêmes dimensions de que $\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2}$, et g ($LT^{-2}$)

Or $\partial^2 \vec{V}(LT^{-2}), \partial x^2 (L^2) \Rightarrow \nabla \vec{V}(L^{-1}T^{-1})$ les dimensions de $\nu(L^2T^{-1})$ et $dx(L)$.il est facile de montrer que le terme $-\frac{\nu}{g}(\Delta udx + \Delta vdy + \Delta wdz)$ à la dimension (L). Il représente ce qu'on appelle *la perte de charge* désignée par *j :*

$$j = -\frac{\nu}{g}(\Delta udx + \Delta vdy + \Delta wdz).$$

Donc l'équation de Bernoulli peut s'écrire sous la manière suivante:

$$Z + \frac{P}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} + j = Cte = H \text{.....................IV.8}$$

- ***Représentation graphique du théorème de Bernoulli pour un liquide réel (Fig. IV.2):***

$$Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} + \frac{V_1^2}{2g} + j_1 = Z_2 + \frac{P_2}{\varpi} + \frac{V_2^2}{2g} + j_2$$

$$h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + j_2 - j_1$$

$j_2 - j_1$: Représente la perte de charge entre les deux points 1 et 2

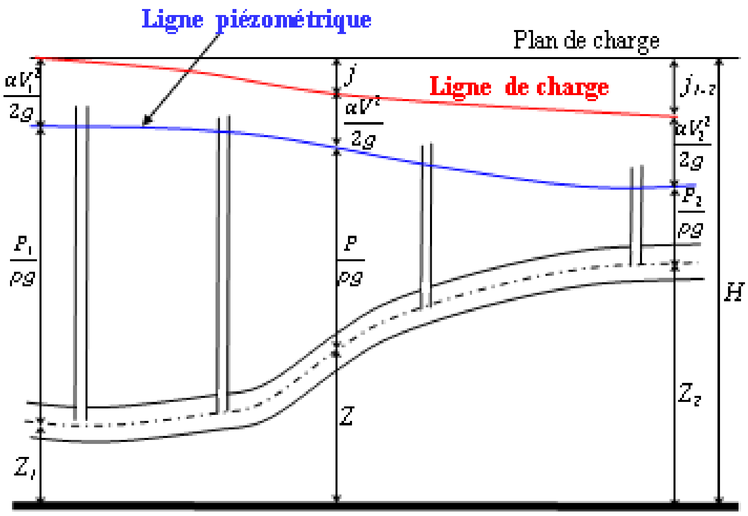

Fig. IV.2 : Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un liquide réel.

IV.2 Expérience de Reynolds:

Il existe plusieurs régimes d'écoulement ou régime hydraulique. Depuis longtemps les hydrauliciens avaient constaté l'existence de différents régimes, mais c'est à Obsorne Reynolds qu'il appartenait de les mettre expérimentalement en évidence et de dégager le critère permettant de les différencier.

L'expérience fondamentale de Reynolds (Fig. IV.3) consiste à envoyer à l'aide du dispositif représenté en liquide coloré au sein d'une masse liquide en mouvement dans un tube en verre.

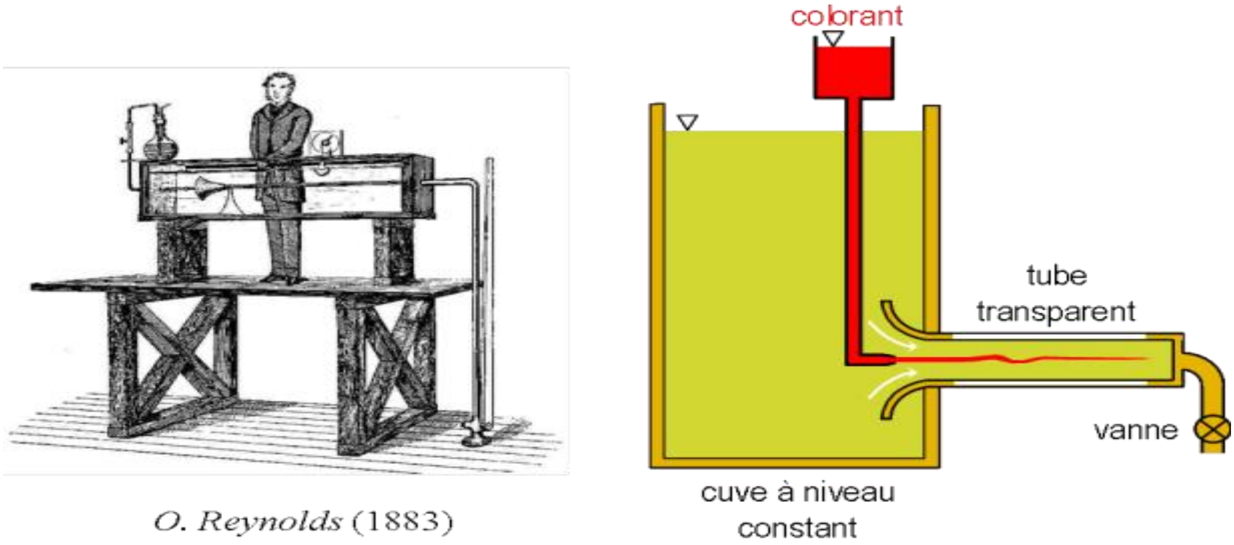

Fig. IV.3 : Expérience de Reynolds

1. En ouvrant légèrement la vanne, le filet liquide coloré commence à passer lentement dans le tube transparent et ne se mélange pas avec les autres couches du liquide. Les lignes de courant dans le liquide sont toujours rectilignes de telle sorte que la coloration reste uniforme. Ce régime est dit *régime laminaire* (Fig. IV.4.a).
2. Quand la vitesse est plus élevée (augmentera l'ouverture de la vanne) ; Le filet coloré devient ondulé et instable, il se mélange rapidement au liquide ambiant. Les lignes de courants du liquide projetées dans toutes les directions d'une manière irrégulière et désordonnée ce régime est dit *régime turbulent* (Fig. IV.4.b).

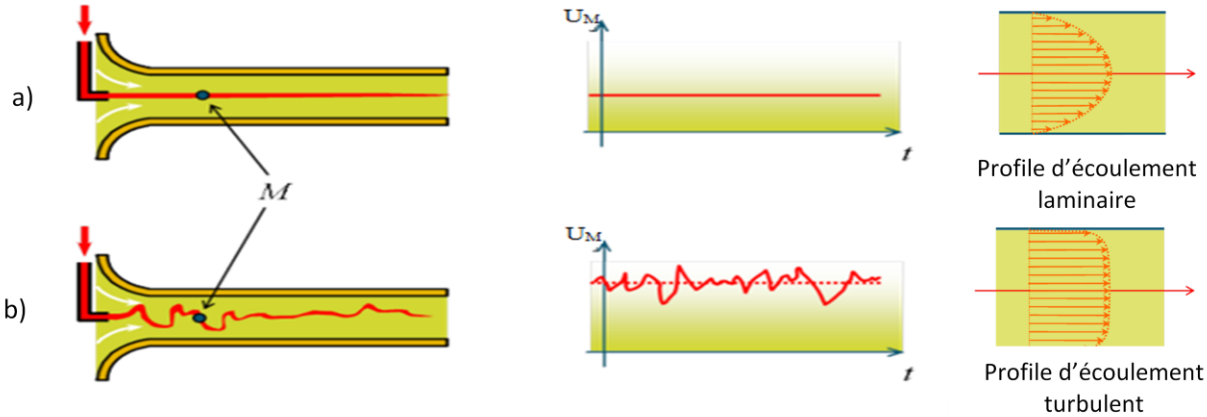

Fig. IV.4 : Régime laminaire(a), régime turbulent (b).

Si on désigne par U la vitesse moyenne dans le tube, D est le diamètre du tube et par ν le cœfficient de viscosité cinématique du liquide en mouvement, le nombre adimensionnel appelé *nombre de Reynolds* est donnée par la relation suivante :

$$R_e = \frac{U.D}{\nu} \text{......................IV.9}$$

Le nombre de Reynolds peut servir à caractériser les régimes d'écoulement (Fig. IV.6).

- Si $R_e < 2300 \Rightarrow$ le régime est tranquille ou laminaire.
- Si $R_e > 2300 \Rightarrow$ le régime est turbulent.

3. Le changement du régime d'écoulement de laminaire à turbulent est un problème de stabilité de l'écoulement. La valeur du nombre de Reynolds est devient R critique (R_{cr}).

- $R_{cr} = 2300 \Rightarrow$ régime de transition (transitoire) (Fig. IV.5).

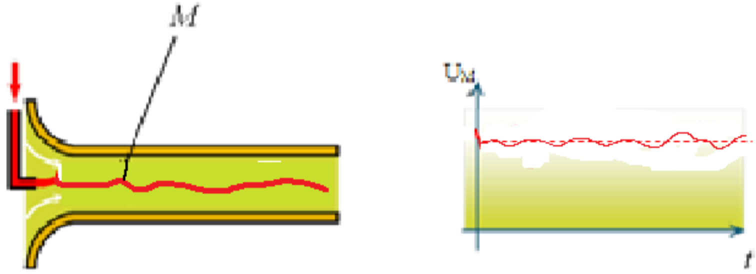

Fig. IV.5 : Régime transitoire.

Fig. IV.6 : Les différents types des régimes d'écoulement.

IV.3 Régime laminaire:

IV.3.1 *Ecoulement entre deux plaques parallèles (Fig. IV.6):*

Dans le cas des écoulements laminaires, les vitesses ne varient pas dans le temps. D'après les expériences, les vitesses données sous la forme de l'expression suivante:

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{y^2}{2} + by + c \text{..............IV.10}$$

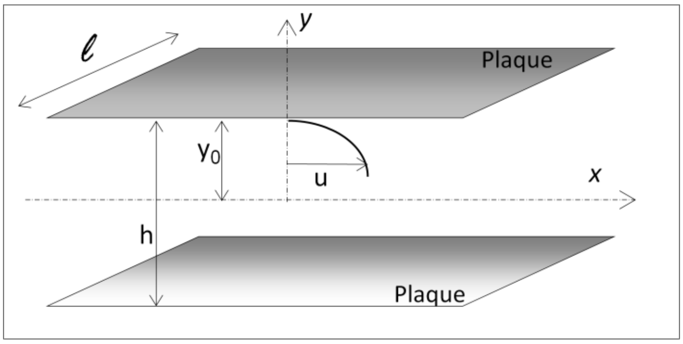

Fig. IV.6 : écoulement entre deux plaques parallèles

b, c sont des constante déterminées par les conditions aux limites (par rapport aux plaques).

IV.3.2 Ecoulement plan de Poiseuille.

Dans un écoulement plan de Poiseuille les deux plaques sont immobiles (Fig. IV.7)

Les conditions aux limites sont:

$$\rightarrow u = 0 \quad \text{Pour} \begin{cases} y = y_0 \\ y = -y_0 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (IV.11) , on pose $\frac{dP}{dx} = a$, et on obtient $\rightarrow$ b = 0$\Rightarrow c = \frac{ay_0^2}{2\mu}$

$$u = \frac{1}{2\mu}(\frac{dP}{dx})y_0^2 + by_0 + c \text{................IV.11}$$

Donc la répartition des vitesses est *parabolique :*

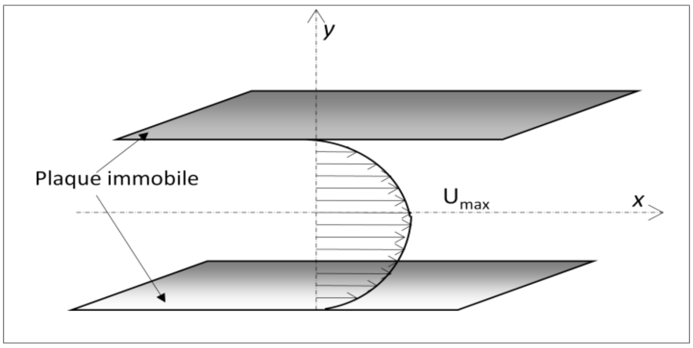

Fig. IV.7 : Ecoulement plan de Poiseuille.

- u_{max} est au milieu entre les deux plaques est à pour valeur $u_{max} = \frac{ay_0^2}{2\mu}$

- u_{moy} =U est égale à : $U = \frac{2}{3}u_{max} \Rightarrow U = \frac{ay_0^2}{3\mu}$

- Le débit unitaire $q = U.h = \frac{2}{3}\frac{ay_0^2}{\mu}$

IV.3.3 *Ecoulement plan de Couette:*

Dans le cas de l'écoulement plan de couette (Fig. IV.8), on considère une plaque fixe et l'autre mobile avec une vitesse V_0.

Les conditions aux limites sont:

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \Rightarrow y = -y_0 \\ u = V_0 \Rightarrow y = y_0 \end{cases}$$

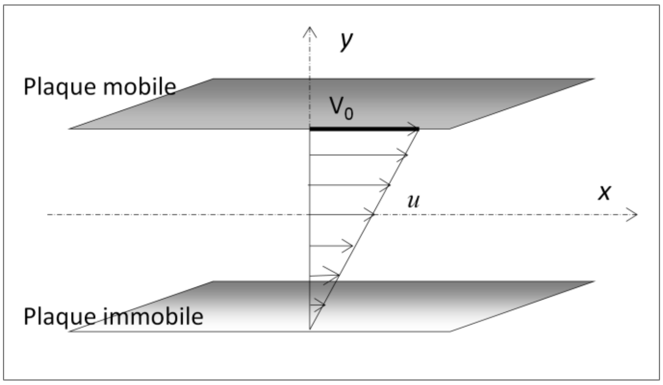

Fig. IV.8 : Ecoulement plan de Couette

En remplaçant dans l'équation (IV.11), on obtient:

$$\left. u = by + c \quad \text{Avec} \quad b = \frac{V_0}{2y_0} \quad c = \frac{V_0}{2} \right\} \Rightarrow u = \frac{V_0}{2}(\frac{y}{y_0} + 1) \text{.....................IV.12}$$

La distribution des vitesses est *linéaire*

IV.3.5 Ecoulement dans les tubes cylindriques:

Dans le cas des écoulements dans les tubes cylindriques (Fig. IV.9), l'expression de u donnée sous la forme suivante:

Conditions aux limites: $\begin{cases} u = 0 \\ y = r \end{cases} \Rightarrow u = \frac{P_1^* - P_2^*}{4\mu.\ell}(r^2 - y^2) \text{..............IV.13}$

La vitesse varie donc suivant une loi parabolique. D'où: $P_1^* = P_1 + \rho g.z_1$ et $P_2^* = P_2 + \rho g.z_2$

- Le débit unitaire: $q=\frac{\pi r4}{8\mu}.\frac{P_1^*-P_2^*}{\ell}$ (Formule de Poiseuille 1840)……….IV.14
- La vitesse moyenne a pour expression : $U=\frac{Q}{\pi r^2}=\frac{Q}{S}=\frac{r^2}{8\mu}.\frac{P_1^*-P_2^*}{\ell}$
- La vitesse maximum est atteinte sur l'axe a pour valeur: $u_{max}=r^2(\frac{P_1^*-P_2^*}{4.\mu.\ell})=2U$

Donc $U=0{,}5.u_{max}$

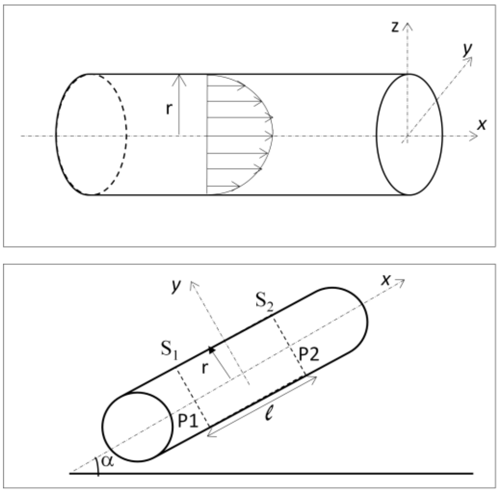

Fig. IV.9

IV.4 Régime turbulent:

Les vitesses dans un écoulement turbulent sont soumises à des variations (Pulsations), plus ou moins rapide dans le temps (u').

Les mesures indiquent que les pulsations se font autour d'une certaine valeur moyenne de vitesses (U), indépendante de temps (Fig. IV.10)

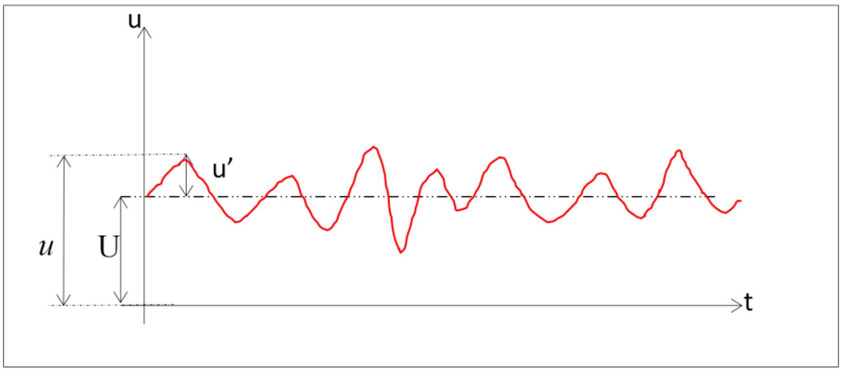

Fig. IV.10 : Variation de la vitesse en régime turbulent.

La vitesse en chaque moment donné du temps au point donné est appelée vitesse instantanée et on la désigne par u .

La différence entre la vitesse instantanée et la vitesse moyenne U s'appelle la vitesse de pulsation u'

Donc on peut écrire: $u=U+u'$

La vitesse moyenne du courant turbulent est égale à :

$$U=\frac{1}{t}\int_0^t u.dt \text{....................IV.15}$$

IV.5. Perte de charge :

La perte de charge ou perte d'énergie est due au frottement des molécules liquides entre elles et contre la paroi.

La perte de charge totale est égale à la somme des pertes de charges linéaires et des pertes de charges singulières en (m).

$$j_t = j_l + j_s \quad \text{…………………..IV.16}$$

IV.5.1 *Perte de charge linéaire:*

L'expression de la perte de charge le long d'une conduite rectiligne et d'une section transversale constante (m) est:

$$j_l = \frac{\lambda}{D}.\frac{V^2}{2g}.L \quad \text{...................IV.17}$$

Où: λ : c'est un coefficient adimensionnel qui dépend de la nature de l'écoulement (R_e) et de la rugosité de la paroi de la canalisation, appelée aussi coefficient de frottement.

D: diamètre de la conduite (m).

V: vitesse moyenne de l'écoulement (m/s).

g: accélération de la pesanteur (m/s^2).

L: longueur de la conduite (m).

IV.5.2 Perte de charge singulière:

La perte de charge singulière, localisée dans une section de la conduite est provoquée par un changement de direction et d'intensité de vitesse, cette perte de charge peut être provoquée par:

- Un changement de section de la conduite ;
- Un changement de la direction d'écoulement ;
- Un branchement ou un raccordement de conduite ;
- Les dispositifs mesurent le débit ;
- Les dispositifs contrôlent le débit ;

La perte de charge singulière est généralement exprimée comme suit:

$$j_s = k\frac{V^2}{2g} \quad \text{..............IV.18}$$

Avec:

V: vitesse moyenne de l'écoulement (m/s) ;

g: accélération de la pesanteur, (m/s^2) ;

k : Coefficient de la perte de charge singulière qui dépend de la géométrie (forme, dimension).