Chapitre 6

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes indirectes.

1.Introduction et définition :

1.1.Application des méthodes indirectes (itératives):

Si l'ordre n de la matrice A est élevé le nombre d'opérations est aussi élevé alors on préfère dans ce cas utiliser les méthodes itératives.

L'objectif est de construire une suite de vecteur $(x)_{\hbar=1,\dots\dots,n}^{(\hbar)}$ qui tend vers un vecteur $\bar{x}$ $s$olution exact de Ax = b souvent, on part d'une approximation$\left(x^{(0)}\right)$ de $\bar{x}$.

$x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots\dots\dots.. x_4^{(0)})^t$

1.2.Le principe des méthodes itératives :

$Ax = b$

on décompose la matrice A en deux matrice comme suivant :

$A = M - N$

$(M - N)x = b$

M$x = Nx$+b

à partir du vecteur initial $x^{(0)}$.

Ou obtient la relation suivante :

$X^{(\hbar+1)} = M^{-1}N\, X^{(\hbar)} + M^{-1}b \dots\dots..(6.1)$

1.3.Décomposition de la matrice A :

$d_{ii} = -a_{ii} \quad i = \overline{1,n}$ D diagonal de la matrice

$l_{ij} = -a_{ij} \quad i > j$

L matrice triangulaire supérieure

$l_{ij} = 0 \quad i \leq j$

$u_{ij} = -a_{ij}$ U matrice triangulaire inférieure

$u_{ij} = 0 \qquad j \leq i$

2. Méthode de jaccobi :

A=M-N

M=D et N=L+U

$X^{\hbar+1} = D^{-1}(L+U)X^{(\hbar)} + D^{-1}b$

Alors la relation itérative de Jacobi est la suivante

$$\begin{cases} x_1^{(\hbar+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(\hbar)} - a_{13}x_3^{(\hbar)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{1n} \; x_n^{(\hbar)}/a_{11} \\ x_2^{(\hbar+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(\hbar)} - a_{23}x_3^{(\hbar)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{2n} \; x_n^{(\hbar)}/a_{22} \\ \\ x_n^{(\hbar+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(\hbar)} - a_{n2}x_2^{(\hbar)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{nn-1} \; x_{n-1}^{(\hbar)}/a_{nn} \end{cases}$$

Avec $a_{ii} \neq 0$

Condition de la convergence

Condition suffisante pour la convergence de cette méthode

$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = \overline{1.n}$ (diagonale dominante)

Ou arrive à la solution lorsqu'on obtient :

$\left|X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}\right| \leq \varepsilon.$ (Erreur obsolue)

Ou bien lorsque :

$\frac{\left|X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}\right|}{\left|X_i^{(n)}\right|} \leq \varepsilon.$ (Erreur relative précision)

3.Méthode de Gauss-Seidel :

M=D-L

$X^{(\hbar+1)} = (D-L)^{-1}UX^{(\hbar)} + (D-L)^{-1}b$

(D-L) $X^{(\hbar+1)} = UX^{(\hbar)} + b$

(D-L) $X^{(\hbar+1)} = UX^{(\hbar)} + b$

$X^{\hbar+1} = D^{-1}LX^{(\hbar+1)} + d^{-1}UX^{(\hbar)} + D^{-1}b$

Alors la relation itérative de Jacobi est la suivante

$$\begin{cases} x_1^{(\hbar+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(\hbar)} - a_{13}x_3^{(\hbar)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{1n}\ x_n^{(\hbar)}/a_{11} \\ x_2^{(\hbar+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(\hbar+1)} - a_{23}x_3^{(\hbar)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{2n}\ x_n^{(\hbar)}/a_{22} \\ \\ x_n^{(\hbar+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(\hbar+1)} - a_{n2}x_2^{(\hbar+1)} - \cdots \ldots \ldots . -a_{nn-1}\ x_{n-1}^{(\hbar+1)}/a_{nn} \end{cases}$$

Avec $a_{ii} \neq 0$

Remarque :

Cette méthode à la même condition de convergence que la méthode de Jaccobi.

Exemple :

Résoudre le système suivant par :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

1.Méthode de Jaccobi :

$$\begin{cases} x_1^{(\hbar)} = \dfrac{x_2^{(\hbar-1)} - x_3^{(\hbar-1)}}{2} \\ x_2^{(\hbar)} = \dfrac{-x_1^{(\hbar-1)} - 3x_3^{(\hbar-1)}}{3} \\ x_3^{(\hbar)} = \dfrac{-3x_1^{(\hbar-1)^3} - 2x_2^{(\hbar-1)} - 4}{5} \end{cases}$$

$x^{(0)} = (0.0.0)$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.5 \\ x_2^{(1)} = 0 \\ x_3^{(1)} = 0.8 \end{cases} \begin{cases} x_1^{(2)} = 0.9 \\ x_2^{(2)} = 1.9 \\ x_3^{(2)} = 1.1 \end{cases}$$

2.Méthode de Gauss-séidel :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)} - 1}{2} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{-x_1^{(k)} - 3x_3^{(k-1)}}{3} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{-3x_1^{(k)^3} - 2x_2^{(k)} - 4}{5} \end{cases}$$