

## ***CHAPITRE II***

### ***Théorie de l'état de contraintes***

## I- Introduction

L'étude d'un phénomène quelconque impliquant un mouvement (déformation d'une plaque, écoulement d'un fluide ...) est basée sur la résolution d'équations mathématiques, décrivant les lois physiques qui régissent ce mouvement. Ces équations qui expriment généralement une conservation (de forces, de moments ou d'énergie) sont appelées les équations de conservation.

## II- Forces dans un milieu continu

Considérons un milieu continu, il existe trois types de forces à savoir :

- Les forces intérieures
- Les forces massiques (volumiques)
- Les forces surfaciques

### II-1. Forces intérieures

Ce sont les forces qui s'exercent entre les particules qui forment le milieu, elles sont de même module et de sens opposé, elles peuvent donc être négligées.

### II-2. Forces massiques

Appelés forces de pesanteur, elles sont proportionnelles à la masse du milieu et s'exercent à travers son volume.

$$d\vec{F}_v = \rho \cdot \vec{g} \cdot dV$$

$\rho$  : masse volumique

$g$  : accélération de la pesanteur

$dV$  : élément de volume

### II-3. Forces surfaciques

Appelées aussi forces de contact, elles s'exercent suivant le principe de Cauchy qui dit (l'effet du matériau à l'extérieur de (S) sur la matériau à l'intérieur de (S) est équipollent à l'existence d'une force  $d\vec{F}_s$  surfacique qui agit sur chaque élément de (S).

$$d\vec{F}_s = \vec{\tau} \cdot dS$$

$\tau$  : vecteur contrainte

$dS$  : élément de surface

La force totale est donnée par la relation :

$$\vec{F}_s = \int \vec{\tau} \cdot dS$$

Le vecteur de contrainte  $\vec{\tau}$  peut être défini en passant à la limite du rapport de  $d\vec{F}_s$  sur  $dS$  quand celle-ci tend vers la valeur zéro

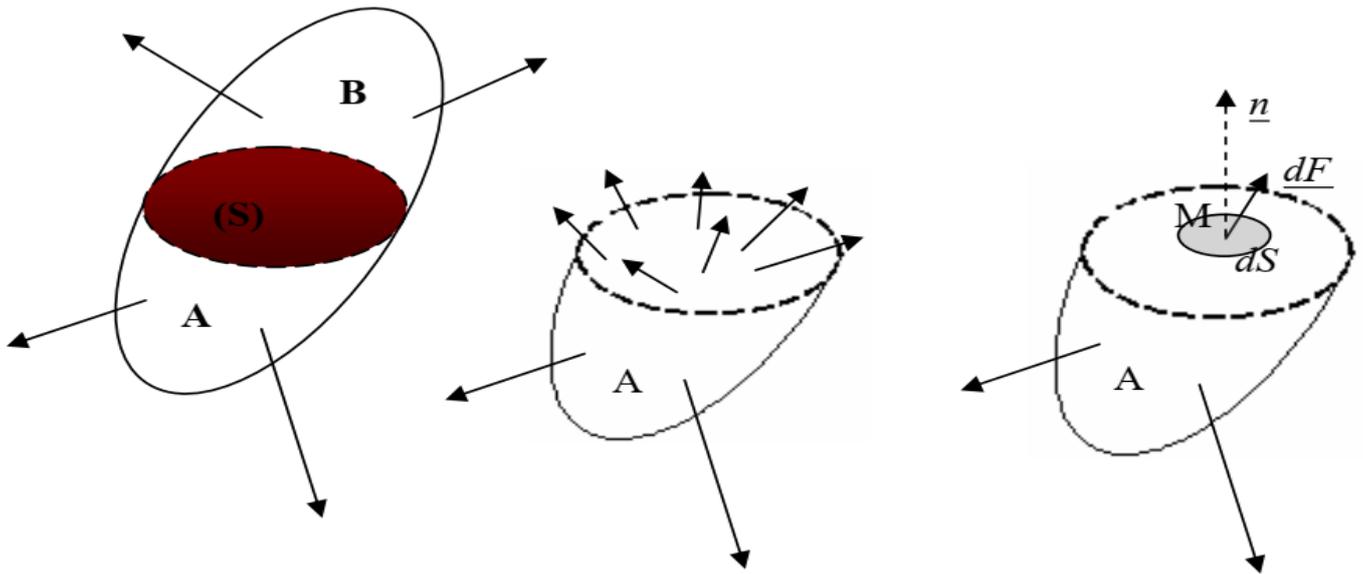
$$\vec{\tau} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}_s}{dS}$$

### III- Notion de contrainte

Un solide est en état de contrainte s'il est soumis à l'action de forces extérieures.

Considérons un domaine (D) délimitant un solide ( $\Omega$ ) qui est en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures  $F_i$ . Sous l'action de ses forces, le solide est en équilibre. On voit la naissance de contraintes à l'intérieur de ( $\Omega$ ). Soit ( $\pi$ ) un plan virtuel qui partage ( $\Omega$ ) en deux parties.

Soit (S) la surface de coupe, qui peut être plane ou non. Le domaine (D) occupé par le solide est divisé en deux sous-ensembles A et B. Nous allons analyser l'ensemble des efforts locaux appliqués par B sur A à travers leur surface commune (S) (**figure 1**)



**Figure 1.** Force élémentaire sur une facette

$\vec{n}$ : Effort normal

$dS$ : Élément d'aire sur la facette de la normal  $\vec{n}$

$d\vec{F}$ : Effort interne qui passe par  $dS$

Nous venons de voir qu'un solide sur lequel s'applique des actions mécaniques extérieures développe des efforts intérieurs de cohésion. Ces efforts, on dit qu'ils sont en équilibre avec les torseurs des actions mécaniques extérieures ( $\sum F = 0 ; \sum M = 0$ ).

Analysons l'effort  $dF$  appliqué en M sur la facette. Si  $dS$  est suffisamment petite on peut considérer que cet effort est proportionnel à l'aire de la facette en question. Nous pouvons écrire l'effort comme le produit d'un vecteur de densité surfacique de force que nous notons  $T(M, n)$  par l'aire de l'élément de surface  $dS$  :

$$dF = T(M, n) dS$$

La densité surfacique de force  $T(M, n)$  est plutôt appelé vecteur contrainte. Ce nouvel élément mécanique est relatif à un point M du milieu et dépend de l'orientation  $n$  de la facette choisie. Une autre définition du vecteur contrainte est souvent proposée :

$$\underline{T}(M, n) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS}$$

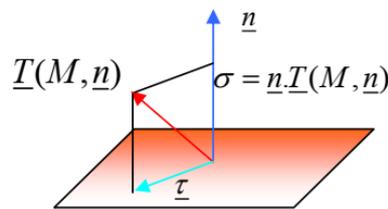
### III-1. Composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte défini précédemment peut être décomposé suivant la normale à la facette et sur le plan tangent à la facette au point M.

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau}$$

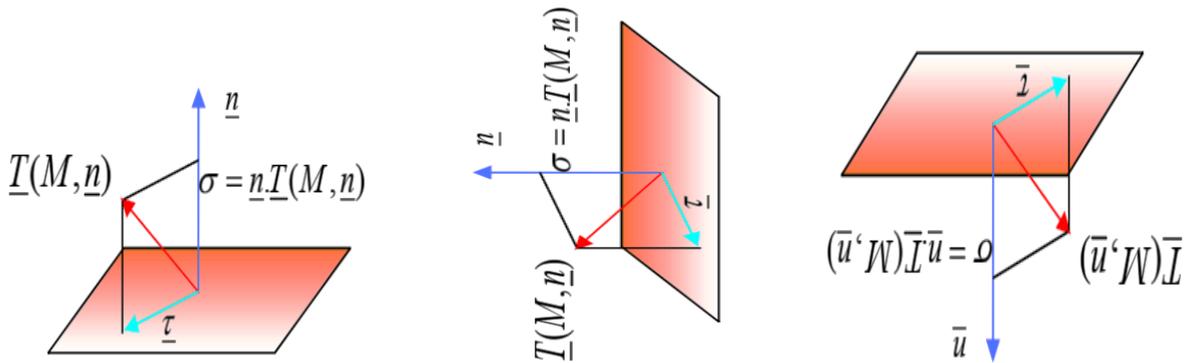
Dans cette expression,  $\sigma$  est la contrainte normale et traduit une densité d'effort de compression ou de traction au point M. La composante vectorielle  $\underline{\tau}$  traduit les contraintes de cisaillement dans différentes directions du plan tangent à la facette.  $\sigma$  est une valeur algébrique positive dans le cas d'une contrainte de traction et négative dans le cas d'une contrainte de compression. Nous pouvons écrire la relation entre le vecteur contrainte et ses composantes :

$$\|\underline{T}(M, \underline{n})\|^2 = \sigma^2 + \|\underline{\tau}\|^2$$

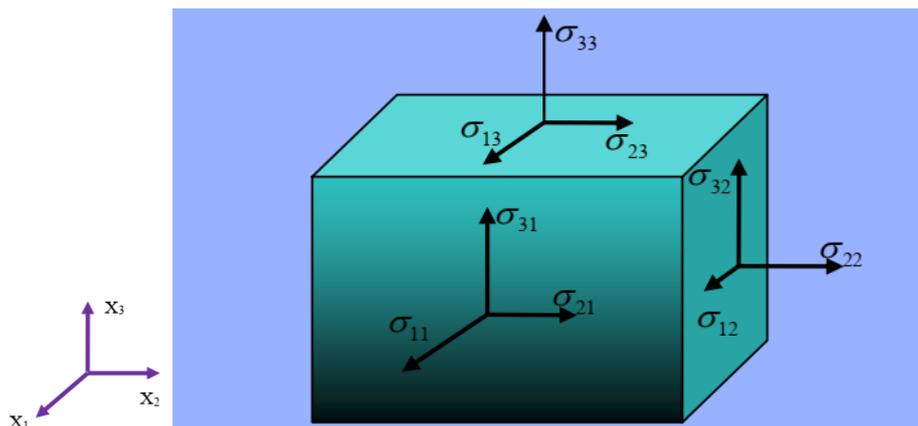


**Figure 2.** Décomposition du vecteur contrainte agissant au point M sur la facette de normale n

Un vecteur contrainte ne définit pas complètement l'état des contraintes en 1 point car il est attaché à une facette attaché à ce point. Pour faire il est démontré que l'état des contraintes en 1 point est donné par 3 facettes distantes qui sont :

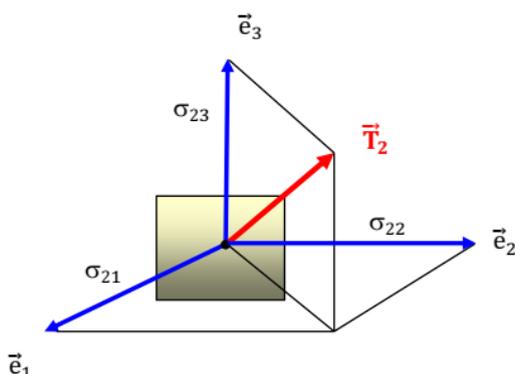


Nous pouvons les résumés en un petit parallélépipède autour du point P :



**Figure 3.** Composantes des vecteurs contraintes sur les facettes de normales

Soient  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$  et  $\vec{T}_3$  les contraintes associées aux facettes de normales  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ . Chacun de ces vecteurs de contraintes, peut être décomposé selon les trois axes  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$  (**figure 4**). Les neuf composantes des trois vecteurs de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante :



**Figure 4.** Composantes du tenseur de contrainte

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\vec{T}_2 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{T}_2| \cdot |\vec{e}_1| \cdot \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1)$$

Sachant que :  $\cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1) = \sigma_{21} / T_2$

Alors :  $\sigma_{21} = T_2 \cdot \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1)$

Or :

$$|\vec{T}_2| = T_2 \quad \text{Et} \quad |\vec{e}_1| = 1$$

Donc :

$$\sigma_{21} = T_2 \cdot \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1) = T_2 \cdot \vec{e}_1$$

De même :

$$\sigma_{22} = T_2 \cdot \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_2) = T_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\sigma_{23} = T_2 \cdot \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_3) = T_2 \cdot \vec{e}_3$$

$$\sigma_{11} = T_1 \cdot \cos(\vec{T}_1, \vec{e}_1) = T_1 \cdot \vec{e}_1$$

$$\sigma_{12} = T_1 \cdot \cos(\vec{T}_1, \vec{e}_2) = T_1 \cdot \vec{e}_2$$

$$\sigma_{31} = T_3 \cdot \cos(\vec{T}_3, \vec{e}_1) = T_3 \cdot \vec{e}_1$$

$$\sigma_{33} = T_3 \cdot \cos(\vec{T}_3, \vec{e}_3) = T_3 \cdot \vec{e}_3$$

On en déduit la relation suivante :

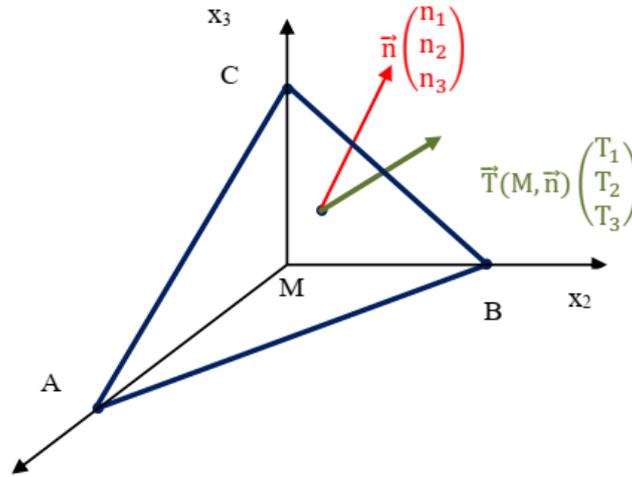
$$\sigma_{ij} = T_i \cdot \vec{e}_j$$

Les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , et  $\sigma_{33}$  représentent les composantes normales du tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$ , tandis que les composantes non diagonales  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ , et  $\sigma_{13}$  représentent les

contraintes de cisaillement. Le 1<sup>er</sup> indice indique la direction dans laquelle agit la composante, le second indique la normal de la facette.

### III-2. Vecteur contrainte sur une facette quelconque

Etudiant l'équilibre d'un tétraèdre élémentaire ayant comme repère (O, X, Y, Z) orienté par sa normal.



**Figure 5.** Composantes du tenseur de contraintes sur une particule de forme quelconque  
 Considérons le bilan des forces agissant sur la particule (**figure 5**) :

Facettes	Forces surfaciques				Forces volumiques	
	ABC	MCA	MAB	MCB		
Aires	ds	n <sub>2</sub> .ds	n <sub>3</sub> .ds	n <sub>1</sub> .ds	ρ.γ <sub>1</sub> .dv	
M x̄ <sub>1</sub>	T <sub>1</sub>	-σ <sub>21</sub>	-σ <sub>31</sub>	-σ <sub>11</sub>		
M x̄ <sub>2</sub>	T <sub>2</sub>	-σ <sub>22</sub>	-σ <sub>32</sub>	-σ <sub>12</sub>		ρ.γ <sub>2</sub> .dv
M x̄ <sub>3</sub>	T <sub>3</sub>	-σ <sub>23</sub>	-σ <sub>33</sub>	-σ <sub>13</sub>		ρ.γ <sub>3</sub> .dv

Soit  $\vec{dF}_1$  la résultante suivant l'axe  $\vec{X}_1$  de toutes les actions s'exerçant sur la particule, alors on peut écrire :

$$\vec{dF}_1 = \rho \cdot dV \cdot \gamma_1$$

$$dF_1 = T_1 \cdot dS - (\sigma_{11}n_1dS + \sigma_{21}n_2dS + \sigma_{31}n_3dS) = T_1 \cdot dS - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3) dS$$

D'autre part :  $dF_1 = \rho \cdot dV \cdot \gamma_1$

Alors :  $T_1 - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3) = \rho \cdot (dV/dS) \cdot \gamma_1$

Si la particule est de dimensions très petites le rapport (dV/dS) tend vers zéro et on peut écrire :

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ T_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ T_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases}$$

On peut conclure que le vecteur de contrainte  $\vec{T}$  (T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>) dépend de la normale unitaire à la surface sollicitée  $\vec{n}$  (n<sub>1</sub>, n<sub>2</sub>, n<sub>3</sub>).

Donc :  $\vec{T} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$

$\sigma$  : Application linéaire qui lie  $\vec{T}$  à  $\vec{n}$

En notation indicielle :

$$T_j = \sigma_{ij} \cdot n_i \quad \text{(Formule fondamentale de Cauchy)}$$

$\sigma_{ij}$  : Composantes du tenseur de second ordre dit tenseur cartésien de contrainte attaché à (M) ou tenseur de Cauchy.

En écriture matricielle :

$$\vec{(T)} = [\sigma] \vec{(n)}$$

Ou :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Cette relation nous permet de calculer les contraintes pour n'importe quelle facette autour du point (p) et ce à partir du tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  c-à-d l'état de contrainte du point (p). La connaissance du tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  donc suffit pour déterminer l'état de contraintes autour d'un point.

#### IV- Equations d'équilibres

Soit une particule parallélépipédique de dimensions  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ . Ecrivons la loi de conservation de mouvement suivant l'axe  $X_1$ .

$$\int_V \rho \cdot \vec{g} \cdot dV + \int_S \vec{\tau} \cdot dS = \int_V \rho \cdot \vec{\gamma} \cdot dV$$

$\int \rho \cdot g \cdot dV$  : force de pesanteur

$\int \tau \cdot dS$  : force de surface

$\int \rho \cdot \gamma \cdot dV$  : force d'inertie

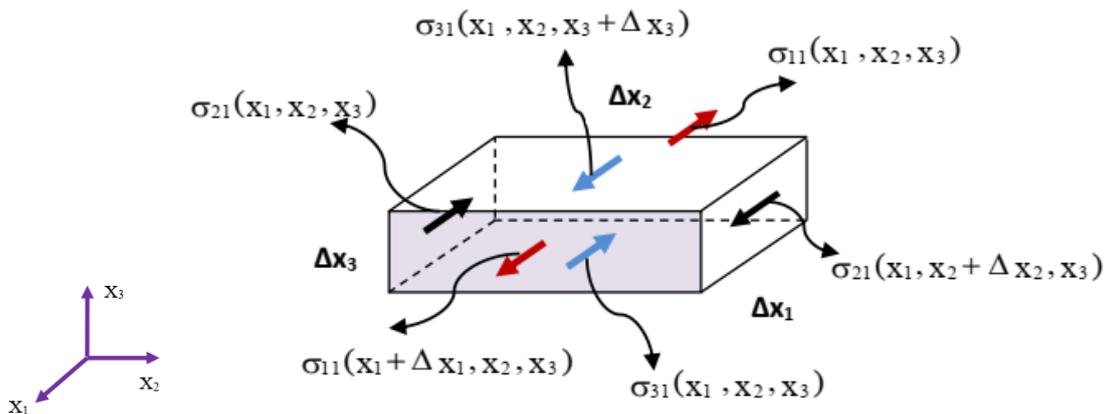


Figure 6. Particule soumise à un chargement extérieur

- **Forces de surface**

$$\int_S \vec{\tau} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta x_2 \Delta x_3} (\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)) dx_2 dx_3 + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_3} (\sigma_{21}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3)) dx_1 dx_3 + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_2} (\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3)) dx_1 dx_2$$

Développons en série de Taylor :

$$\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \Delta x_1 - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1$$

Soit :

$$\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1$$

De même :

$$\sigma_{21}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \Delta x_2$$

$$\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \Delta x_3$$

Ce qui conduit à :

$$\int_S \vec{\tau} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta x_2 \Delta x_3} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1 dx_2 dx_3 \right) + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_3} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \Delta x_2 dx_1 dx_3 \right) + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_2} \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \Delta x_3 dx_1 dx_2 \right)$$

Le volume de la particule est donné par la relation suivante :

$$V = dx_1 dx_2 dx_3$$

La particule étant de dimensions infinies on peut utiliser l'approximation  $dx \approx \Delta x$

Alors l'expression finale des forces de surface est :

$$\int_S \vec{\tau} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

- **Forces de volume**

$$\iiint_V \rho(\gamma_{x1} - g_{x1}) \cdot dx_1 dx_2 dx_3$$

Projetons cette la relation suivant l'axe  $\vec{x}_1$  :

$$\int_V \rho \cdot \vec{\gamma} \cdot d\vec{V} - \int_V \rho \cdot \vec{g} \cdot d\vec{V} = \int_V \rho \cdot (\vec{\gamma} - \vec{g}) \cdot d\vec{V}$$

A la fin la projection sur l'axe  $\vec{x}_1$  de toutes les forces de surface et de volume conduit à la relation suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho \cdot g_{x1} = \rho \cdot \gamma_{x1} = \rho \cdot \frac{dx_1^2}{dt^2}$$

De la même manière la projection sur les deux autres axes  $\vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$  conduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho \cdot g_{x2} = \rho \cdot \gamma_{x2} = \rho \cdot \frac{dx_2^2}{dt^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho \cdot g_{x3} = \rho \cdot \gamma_{x3} = \rho \cdot \frac{dx_3^2}{dt^2}$$

On pose :

$$\rho g_{xi} = f_i$$

L'expression finale des équations d'équilibre devient :

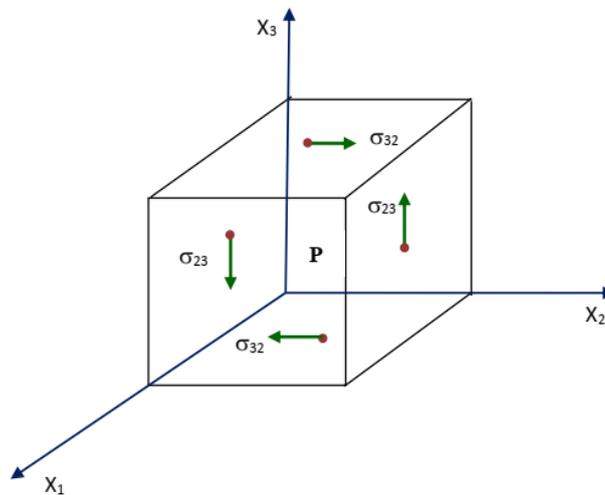
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \cdot \frac{dx_1^2}{dt^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 = \rho \cdot \frac{dx_2^2}{dt^2} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \cdot \frac{dx_3^2}{dt^2} \end{array} \right.$$

En notation indicielle :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \text{div}(\sigma_{ij}) + f_i = \rho \cdot \frac{dx_i^2}{dt^2}$$

- **Equilibre des moments (symétrie du tenseur de contrainte)**

Etudions la rotation d'une particule parallélépipédique de dimensions  $(dx_1, dx_2, dx_3)$ , autour de son centre de masse (P)



**Figure 7.** Symétrie du tenseur de contrainte

Ecrivons la loi fondamentale de la dynamique en projetant les vecteurs forces sur l'axe  $Px_1$  (seules les forces ayant un moment non nul par rapport à  $Px_1$  sont représentées).

Considérons les efforts :

$\pm \sigma_{23} dx_1 \cdot dx_2$  : Forces élémentaires sur les deux facettes de normale  $Px_3$ .

$\pm \sigma_{32} dx_1 \cdot dx_3$  : Forces élémentaires sur les deux facettes de normale  $Px_2$ .

Soit  $(M_1)$  le moment résultant de ses forces par rapport à  $Px_1$  :

$$M_1 = \sigma_{23} dx_1 \cdot dx_2 \cdot (dx_3/2) + \sigma_{23} dx_1 \cdot dx_2 \cdot (dx_3/2) - \sigma_{32} dx_1 \cdot dx_3 \cdot (dx_2/2) - \sigma_{32} dx_1 \cdot dx_3 \cdot (dx_2/2)$$

Soit :

$$M_1 = \sigma_{23} dx_1 \cdot dx_3 \cdot dx_2 - \sigma_{32} dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$$

$dx_2/2$  et  $dx_3/2$  représentent les bras des leviers

Pour que les moments soit en équilibre il faut que :  $\sum M = 0$

Soit :

$$M_1 = \sigma_{23} dx_1 \cdot dx_3 \cdot dx_2 - \sigma_{32} dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 0$$

Ce qui donne :  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$

Il en est de même pour :

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} \text{ et } \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{31}$$

Finalement on peut dire que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

D'où la symétrie du tenseur de contrainte. Si on remplace la relation on obtient :

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot N_j$$

En écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Donc le tenseur contrainte est un tenseur symétrique, il est défini par 6 composant au lieu de 9 : 3composante qui représentent les contraintes normales et 3 qui représentent les contraintes tangentielles.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \text{Sym} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

### V- Contraintes principales et invariants

L'état des contraintes en un point dans le solide est donc complètement décrit par la connaissance du tenseur des contraintes. Nous avons vu d'après la formule de Cauchy que le vecteur contrainte  $T(M, n)$  peut être calculé en appliquant le tenseur  $\sigma$  au vecteur direction  $n$  de la facette en question.

Il existe des facettes de normale pour lesquelles la contrainte de cisaillement est nulle. Ces facettes sont dites facettes principales, les directions  $X$  sont les directions principales

Donc la symétrie du tenseur de contraintes entraîne qu'il possède trois vecteurs propres  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  réels, appelés contraintes principales. En prenant ces trois vecteurs (directions principales) comme repère (repère principal) (**figure 8**), le tenseur des contraintes devient diagonal.

- **Repère quelconque**  $O(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

- **Repère principal**  $O(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

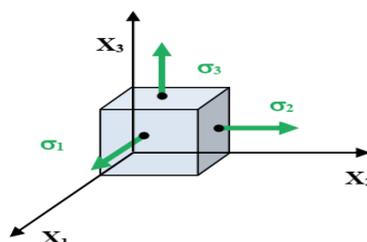


Figure 8. Contraintes principales

## V-1. Intérêt des contraintes principales

La connaissance des contraintes principales est d'une grande importance et concerne essentiellement le calcul des structures en RDM. Un exemple important est celui du critère d'apparition de la rupture

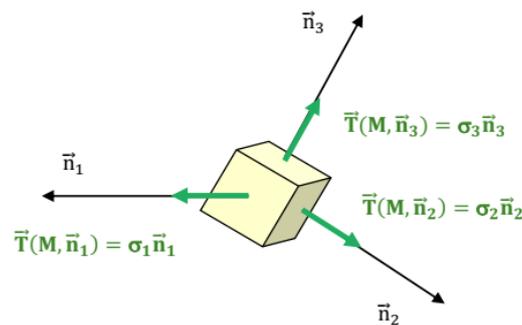
$$\sigma_r = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : Contraintes principales

$\sigma_r$  : Contrainte de rupture

## V-2. Interprétation physique

On peut trouver une particule contenant le point (P) et orientée de telle façon que ces facettes ne seront soumises qu'à des contraintes normales (contraintes principales) à l'exclusion de toutes les contraintes tangentielles (**figure 10**).



**Figure 10.** Interprétation des contraintes principales

## V-3. Recherche des éléments principaux

Les contraintes principales s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique (24.3) à partir du repère initial quelconque  $O(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .

- **Equation caractéristique**

$$\det [\sigma_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}] = 0$$

Soit :

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = (\sigma_{11} - \lambda) [(\sigma_{22} - \lambda) \cdot (\sigma_{33} - \lambda) - (\sigma_{23} \cdot \sigma_{32})] - \sigma_{21} \cdot [\sigma_{12} \cdot (\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{13} \cdot \sigma_{32}] + \sigma_{31} \cdot [\sigma_{12} \cdot \sigma_{23} - \sigma_{13} \cdot (\sigma_{22} - \lambda)] = 0$$

Soit après arrangement :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \cdot \lambda^2 - (\sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} + \sigma_{11} \cdot \sigma_{33}) - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \lambda + (\sigma_{11} \cdot \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} + 2 \cdot \sigma_{12} \cdot \sigma_{13} \cdot \sigma_{23} - \sigma_{11} \cdot \sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \cdot \sigma_{13}^2 - \sigma_{33} \cdot \sigma_{12}^2) = 0$$

En introduisant les grandeurs  $I_1, I_2$  et  $I_3$  appelées invariants du tenseur des contraintes  $P(\lambda)$  devient :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

$I_1, I_2$  et  $I_3$  sont définis par :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{trace}(\sigma_{ij})$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = \frac{1}{2}[(\text{trace}(\sigma_{ij}))^2 - \text{trace}(\sigma_{ij}^2)]$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \det(\sigma_{ij})$$

Dans le repère principal  $O(X_1, X_2, X_3)$  les invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont donnés par les relations suivantes :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace}(\sigma)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 - \frac{1}{2}[(\text{trace}(\sigma))^2 - \text{trace}(\sigma^2)]$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det(\sigma)$$

- **Déviateur des contraintes**

On peut décomposer le tenseur de contraintes en la somme de deux tenseurs, un premier tenseur sphérique et un second déviatorique.

$$\sigma_{ij} = \sigma \cdot \delta_{ij} + S_{ij}$$

$\sigma$  représente la partie sphérique, elle est donnée par la relation

$$\sigma = I_1/3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3.$$

$S_{ij}$  est la partie déviatorique du tenseur de contraintes. Elle est donnée par la relation.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

$$S_{11} = \sigma_{11} - (1/3)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})/3$$

$$S_{22} = \sigma_{22} - (1/3)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = (2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33})/3$$

$$S_{33} = \sigma_{33} - (1/3)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22})/3$$

$$S_{12} = \sigma_{12}$$

$$S_{13} = \sigma_{13}$$

$$S_{23} = \sigma_{23}$$

L'expression finale du tenseur déviatorique est donnée par la relation suivante :

Pour le tenseur déviatorique les invariants sont notés :  $J_1, J_2, J_3$  et sont définis de la même manière que pour les invariants du tenseur des contraintes :

$$J_1 = \text{trace}(S_{ij}) = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

$$J_2 = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{11}S_{33} - (S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{13}^2)$$

$$J_3 = \det(S_{ij}) = S_1S_2S_3$$

### Remarque

Les invariants sont utilisés en plasticité des solides (Critère de Von Mises)

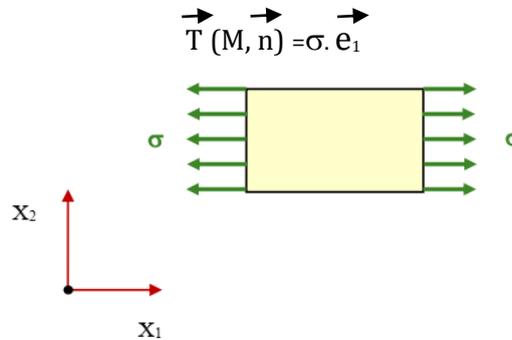
## V-4. Tenseur de contraintes particuliers

### V-4.1. Etat de contraintes uni axial (traction ou compression simple)

L'état de contraintes en un point (M) est dit uni axial (**figure 11**), si le tenseur des contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit :



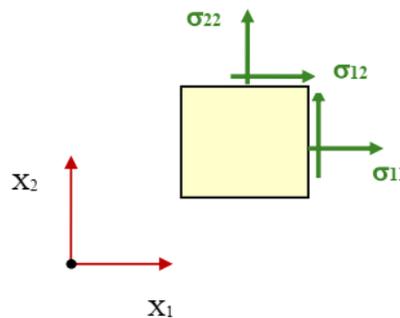
**Figure 11.** Etat de contraintes uni-axial

Cet état de contrainte est appelé état de traction si  $\sigma$  est positif et état de compression simple si  $\sigma$  est négatif. Si  $\sigma > 0$ , il s'agit d'une traction et si  $\sigma < 0$  c'est une compression.

### V-4.2. Etat plan de contrainte

En un point (M), l'état de contrainte est plan (**figure 12**), si le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Figure 12.** Etat plan de contraintes

Dans cet état plan de contraintes (**figure 12**), les contraintes évoluent dans le plan  $O(x_1, x_2)$ . Si de plus, nous avons  $\sigma_{33} \neq 0$ , on parle de pseudo état plan de contraintes.

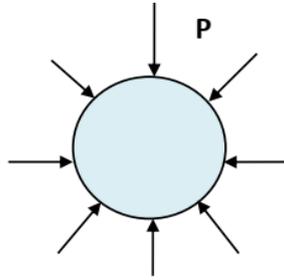
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

### V-4.3. Etat de contraintes isotrope

L'état de contraintes en un point (M) est isotrope (**figure 13**), si quelque soit la facette, nous avons  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n}$ , ainsi les trois contraintes principales sont égales et le tenseur de contraintes est de la forme suivante quelque soit le repère :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Si  $\sigma > 0$ , il s'agit d'une tension et si  $\sigma < 0$  c'est une compression.

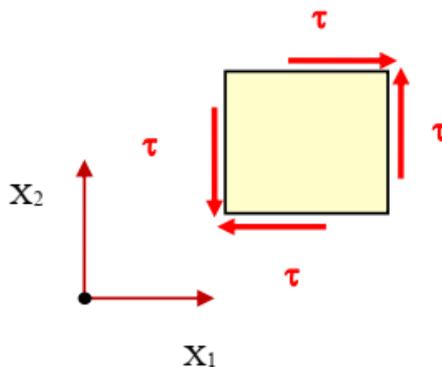


**Figure 13.** Etat de contrainte isotrope

### V-4.4. Etat de cisaillement simple

Si l'état de contraintes en (M) est un état de cisaillement simple (**figure 14**) par rapport aux deux directions  $x_1$  et  $x_2$ , le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Figure 14.** Etat de cisaillement simple

## VI- Mesure de contraintes

Les contraintes sont des forces par unité de surface (pression), l'unité de mesure des contraintes dans le système international (SI) est le Pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ) dont le multiple est le méga pascal ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$ ).

## VII- Représentation géométrique des cercles de Mohr

Otto Mohr était un ingénieur allemand qui a mis au point plusieurs procédés de construction géométrique ramenant des problèmes spatiaux à des solutions de géométrie plane simples. Il a développé entre autre la théorie dite des « cercles de Mohr » en 1882.

La représentation de Mohr consiste à représenter l'état de contraintes tridimensionnel, d'un point (P) sur un graphe bidimensionnel appelé plan de Mohr ou encore plan des contraintes : normales  $\vec{\sigma}_N$  et tangentielles  $\vec{\tau}_t$ . Les axes de coordonnées choisis sont les axes principaux dont les contraintes principales sont des valeurs distinctes prises par convention dans l'ordre  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Soit un point P d'un milieu continu en état de contrainte (figure 15) la composante  $\sigma_N$  du vecteur contrainte  $\vec{T}(P, \vec{n})$  est donnée par la relation :

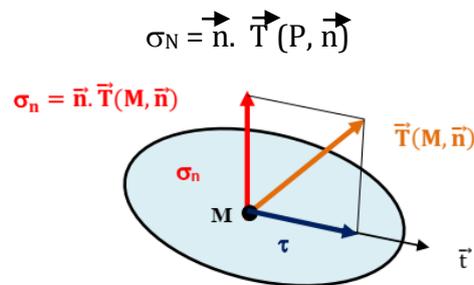


Figure 15. Composantes du vecteur contrainte

Pour chaque facette de normale unitaire  $\vec{n}$  on obtient un point (M), extrémité du vecteur contrainte  $\vec{T}(P, \vec{n})$ . On se propose de chercher le lieu géométrique de ce point (M). Si on fait varier cette facette dans le plan de Mohr O ( $\vec{\sigma}_N, \vec{\tau}_t$ ).

Sachant que :

$$\vec{T} = \vec{\sigma}_N + \vec{\tau}_t$$

Alors :

$$T^2 = \sigma_N^2 + \tau_t^2$$

En écriture indicielle l'expression de  $\sigma_N$  devient :

$$\sigma_N = \vec{T}(P, \vec{n}) \cdot \vec{n} = T_i n_i = n_i \sigma_{ij} n_j$$

Alors :

$$\sigma_N = n_i \sigma_{ij} n_j$$

Soit alors en écriture matricielle :

$$\sigma_N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

En développant la relation par rapport au repère quelconque O( $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ) on obtient :

$$\sigma_N = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{13}n_1n_3 + 2\sigma_{23}n_2n_3$$

En raisonnant dans le repère principal O( $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$ ) où  $\sigma_{ij}=0$  pour  $i \neq j$  nous aurons :

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\text{Et : } T^2 = \sigma_N^2 + \tau_t^2 = T \cdot T = T_i T_i = (\sigma_{ij} n_j) \cdot (\sigma_{ij} n_j) = (\sigma_{ij})^2 (n_j)^2$$

Alors :

$$\sigma_N^2 + \tau_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

La normale unitaire est définie par la relation suivante :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \sigma_N^2 + \tau_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_N \\ \sigma_N^2 + \tau_t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système d'équations, par la méthode de Cramer par exemple, par rapport à  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  et  $n_3^2$ , nous ramène à un résultat qui peut nous aider à trouver le lien géométrique du point (M) extrémité du vecteur contrainte  $\vec{T}(P, \vec{n})$ .

On obtient :

$$n_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_N^2 + \tau_t^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_N & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

De même :

$$n_2^2 = \frac{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Posons :

$$\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = K_1 n_1^2 \quad \text{Avec } K_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Cette équation est l'équation d'un cercle de centre :

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

Et de rayon :

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

De même :

$$\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 = K_2 n_2^2 \quad \text{Avec } K_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)$$

Cette équation est l'équation d'un cercle de centre :

$$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Et de rayon :

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

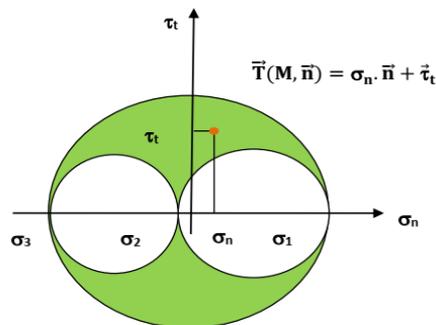
Et :  $\sigma_N^2 + \sigma_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 = K_3 n_3^2$  Avec  $K_3 = (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)$

Cette équation est l'équation d'un cercle de centre :

$$C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Et de rayon :

$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



**Figure 16.** Représentation graphique des cercles de Mohr

**Discussions des cas :** sachant que :  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  et  $n_3^2$  sont strictement positifs et par convention on prend  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  nous avons :

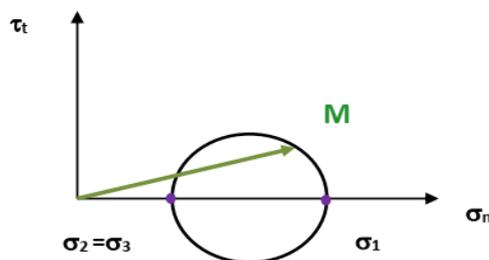
$K_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$  Ce qui implique que :  $\sigma_N^2 + \sigma_t^2 - \sigma_N(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 > 0$  et cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C1).

$K_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$  Ce qui implique que :  $\sigma_N^2 + \sigma_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 < 0$  et cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C3).

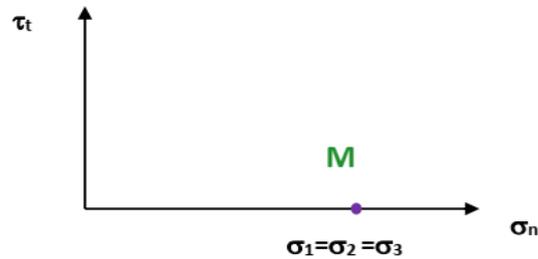
$K_3 = (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0$  Ce qui implique que :  $\sigma_N^2 + \sigma_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 > 0$  et cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C3).

### Remarques

- Si  $\sigma_2 = \sigma_3$  le tri cercles de Mohr se réduit à un seul cercle, et le lieu géométrique du point (M) est le périmètre de ce cercle.



- Si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  le tri cercle de Mohr ainsi que le lieu géométrique du point M se réduit à un point.



## Application

En un point (M) d'un milieu continu l'état de contrainte est donné par le tenseur suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$
2. Déterminer les contraintes : totale T, normale  $\sigma_N$  et tangentielle  $\tau_t$ , suivant une facette de normale unitaire  $\vec{n} = (1/\sqrt{3})\vec{e}_1 + (\sqrt{2}/\sqrt{3})\vec{e}_2$

## Solution

### 1. Contraintes principales

$$\det[\sigma_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}] = 0$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 120 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 40 - \lambda & 10 \\ 0 & 10 & 40 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(120 - \lambda)[(40 - \lambda)^2 - 10^2] = 0$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 120 \\ \lambda_2 = 30 \\ \lambda_3 = 50 \end{array} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 120 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

### 2. Contrainte totale

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_1 = 40\sqrt{3} = 69.28 \text{ Mpa} ; T_2 = (40/3)\sqrt{6} = 32.65 \text{ Mpa} ; T_3 = (10/3)\sqrt{6} = 8.16 \text{ Mpa}$$

$$T = \sqrt{(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2)} = 77.02 \text{ Mpa}$$

### 3. Contrainte normale

$$\sigma_N = n_i \sigma_{ij} n_j = (1/\sqrt{3} \quad \sqrt{2}/\sqrt{3} \quad 0) (40\sqrt{3} \quad (40/3)\sqrt{6} \quad (10/3)\sqrt{6}) = 66.66 \text{ Mpa}$$

### 4. Contrainte tangentielle

$$\tau = \sqrt{(T^2 - \sigma_N^2)} = 38.58 \text{ Mpa}$$

## **Références**

Mécanique des solides, Elasticité, A. ALLICHE, Maître de Conférences - Paris 6, Université pierre and marie curie la science à Paris

Mecanique des milieux continus cours et applications, Dr. Deghboudj samir, Université Larbi Tébessi de Tébessa, 2016