# Chapitre 2

# Vibrations libres des systèmes à un degré de liberté.

## 2. 1 Introduction

Tout système vibre loin d'excitations extérieures (le mouvement est dû à une perturbation initiale), les vibrations qu'ont suivies sont dites libres. Si le système nécessite une seule coordonnée pour son étude, le système est donc à un degré de liberté. Si le système ne perd pas de l'énergie, les vibrations sont dites non amorti, dans le cas contraire ils sont dites amortis.

Pour étudier les systèmes vibratoires il faut suivre les étapes suivantes :

- Etablir l'équation différentielle qui représente le mouvement.
- La résolution de l'équation différentielle.
- Déduire les paramètres physiques : Amplitude, Battement, Fréquence ...etc.

## 2.2 Vibrations libres non amorties

### 2.2.1 Vibration de translation non amortie

Plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer l'équation différentielle représentant le mouvement. Parmi ces méthodes on cite : la méthode de Newton, la méthode de Lagrange, la méthode d'énergie…etc.

Dans le présent cours, nous utilisons deux méthodes seulement : la méthode de newton et la méthode de Lagrange.

**a- La méthode de Newton**

**Exemple 1 :**

On prend le système composé d'une masse $m$ suspendue à un ressort de raideur $k$ et de longueur initiale $l_0$.

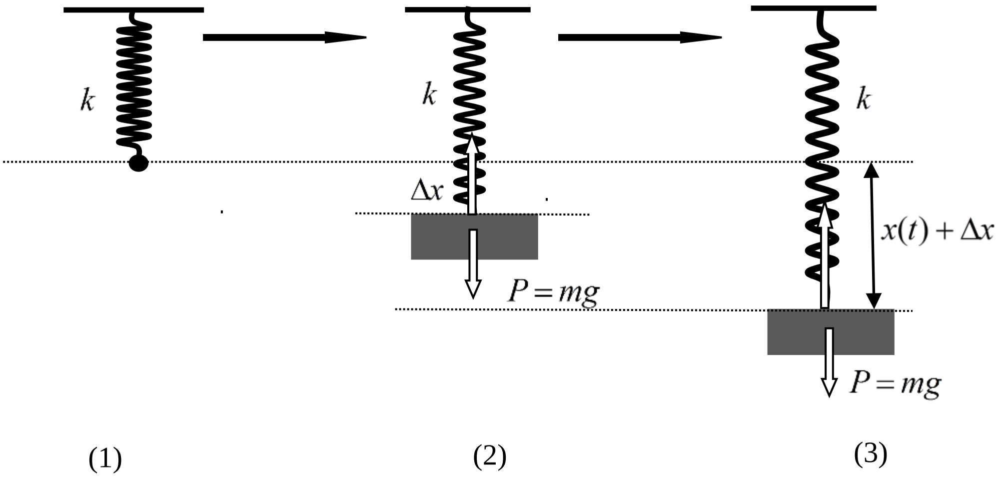



Figure 2.1 : Système masse-ressort à un degré de liberté

A l'équilibre mécanique (position 2) et selon le principe du Newton on peut écrire

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$mg - k\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\Delta x \tag{2.1}$$

| |
|---|
| *Remarque : on peut trouver expérimentalement la raideur d'un ressort avec cette expérience simple, où* $k = \dfrac{mg}{\Delta x}$ |

Dans la position 3, d'après la deuxième loi du Newton $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$ on peut écrire :

$$mg - k(x(t) + \Delta x) = m \cdot \gamma = m\ddot{x} \tag{2.2}$$

$$mg - k\Delta x - k\,x(t) = m\,\ddot{x} \tag{2.3}$$

À partir de la relation (2.1), on trouve ce qui suit :

$$-k\,x(t) = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{2.4}$$

Finalement on peut écrire l'équation différentielle qui représente le mouvement par :

$$\ddot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0 \qquad (2.5)$$

On remarque que c'est une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre.

**Exemple 2 :**

On prend le système du pendule simple.

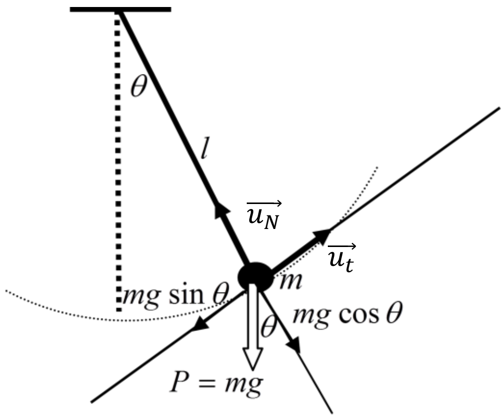



Figure 2.2 : Système à un degré de liberté : le pendule simple.

D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$ , on trouve :

$$\vec{p}+\vec{T}=m\vec{\gamma} \qquad (2.6)$$

- Par la projection sur l'axe $\vec{u_t}$ :

$$-mg\,sin(\theta)=m\gamma_t \qquad (2.7)$$

$\gamma_t$ : L'accélération tangentielle et g : la pesanteur.

- Par la projection sur l'axe $\vec{u_n}$ :

$$-mg\cos(\theta)+T=m\gamma_n=0 \qquad (2.8)$$

Nous avons $v_t=l\dot{\theta}$ *et* $\gamma_t=l\ddot{\theta}$

Par remplacement dans l'équation (2.7), on trouve.

$$-mg\sin(\theta) = ml\ddot{\theta} \qquad (2.9)$$

A la fin on peut écrire,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \qquad (2.10)$$

On suppose que le pendule oscille avec des petits angles ce que permit d'utiliser l'approximation $\sin(\theta) = \theta$. L'équation (2.10) s'écrit donc comme suit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (2.11)$$

C'est l'équation différentielle du mouvement vibratoire.

**b- Méthode de Lagrange :**

Nous avons consacré une brève démonstration de la méthode de Lagrange dans l'annexe 1. Dans tout qui suit, on utilise directement la méthode. Pour mieux comprendre et apprécier l'intérêt de la méthode de Lagrange, On utilise les deux exemples précédents.

- **Masse ressort**

On considère un système masse-ressort à un degré de liberté. Il est libre (aucune force extérieure) et conservatif (non amorti). Dans ce cas (voire l'annexe 1), l'équation de Lagrange s'écrit comme suit,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2.12).$$

$L$ : Le Lagrangien du système est donné par : $L = T - U$

$q$ : La coordonnée généralisée, dans ce cas $q \equiv x$

$T$ : L'énergie cinétique du système, $T=\frac{1}{2}mv^2$, $comme\, v=\dot{x} \Rightarrow T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$U$ : L'énergie potentielle du système, $U=\frac{1}{2}kx^2$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2 \tag{2.13}$$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{x}}\right)=m\ddot{x} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx \tag{2.15}$$

En remplaçant les équations (1.14) et (1.15) dans (1.13) on aboutit à l'équation différentielle représentant le mouvement vibratoire,

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \tag{2.16}$$

➢ **Pendule simple**

Le système libre (aucune force extérieure appliquée) et conservatif (non amorti). L'équation de Lagrange est donnée par la relation (2.12),

$L$ : Le Lagrangien du système est donné par : $L=T-U$

$q$ : La coordonnée généralisée, dans ce cas $q\equiv\theta$

$T$ : L'énergie cinétique du système, $T=\frac{1}{2}m\dot{v}^2$, $comme\, v=l\theta \Rightarrow T=\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2$

$U$ : L'énergie potentielle du système, $U=mgl(1-\cos\theta)$

$L=\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$ ,

$$L = \frac{1}{2} ml\dot{\theta}^2 - mgl + mgl\cos\theta \tag{2.17}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \tag{2.18}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$ ,

Comme nous l'avons mentionné auparavant, il faut faire des simplifications pour arriver à des solutions analytiques. On considère que le pendule oscille (vibre) avec des petits angles, ce qui permit d'écrire $\sin\theta \approx \theta$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta \tag{2.19}$$

On remplace les équations (2.18) et (2.19) dans l'équation de Lagrange (2.12) on trouve :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \tag{2.20}$$

A la fin, on trouve l'équation différentielle qui représente le mouvement vibratoire

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.21}$$

On reprend par exemple le cas du système masse ressort et mettant l'équation sous la forme

$$\ddot{x} + w_n^2 x = 0 \text{ avec } w_n^2 = \frac{k}{m} \tag{2.22}$$

La résolution de l'équation (2.22) est de la forme (voire l'annexe 2),

$$x = A_1\cos(w_n t) + A_2\sin(w_n t) \tag{2.23}$$

$A_1$ *et* $A_2$ sont des constantes peuvent être trouvées à partir les conditions initiales.

$$\grave{a} \quad t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1 = x_0 \quad et \quad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{w_n}$$

Finalement on trouve :

$$x = x_0 \cos(w_n t) + \frac{\dot{x}_0}{w_n} \sin(w_n t) \qquad (2.24).$$

Le déplacement $x$ de la masse, peut être écrit sous une forme plus adéquate, en posant $A_1 = A\sin\varphi_0$ *et* $A_2 \cos\varphi_0$. Ça veut dire qu'on remplace $A_1$ *et* $A_2$ par $A$ *et* $\varphi_0$.

$$x = A\sin\varphi_0 \cos(w_n t) + A_2 \cos\varphi_0 \sin(w_n t) \qquad (2.25)$$

En utilisant, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$, l'équation (2.25) peut s'écrire comme suit :

$$x = A\sin(w_n t + \varphi_0) \qquad (2.26)$$

L'équation représente un mouvement harmonique dont :

- A : l'amplitude du mouvement.
- $w_n$ : le battement naturel du mouvement.
- $\varphi_0$ : la phase (l'angle initial).

La vitesse de la masse est représentée par le premier dérivé de la position $x$

$$\dot{x} = Aw_n \cos(w_n + \varphi_0) \qquad (2.27)$$

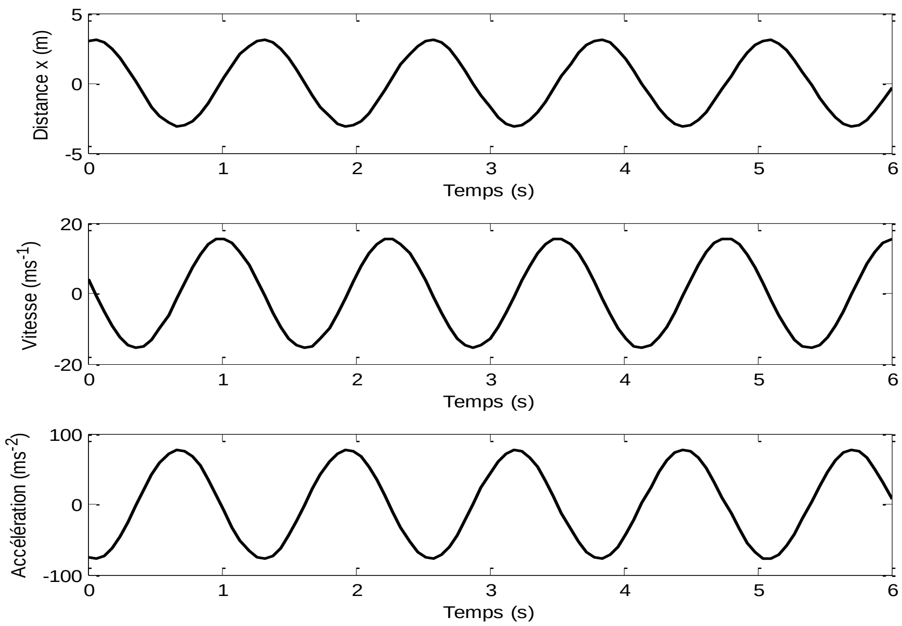



Figure 2. 3 : Position, vitesse et accélération en fonction du temps pour le mouvement harmonique

L'accélération est donnée par le dérivé second

$$\ddot{x} = -Aw_n^2 \sin(w_n t + \varphi_0) \tag{2.28}$$

Sur la figure 1.14 on représente la position $x$, la vitesse $\dot{x}$ ainsi que l'accélération $\ddot{x}$ de la masse m

## 2. 2 Vibrations de rotations libres non amorties

Soit un système oscillant autour d'un axe, le mouvement résultant s'appelle mouvement vibratoire rotationnel. On prend l'exemple de deux masses $m_1$ et $m_2$ reliées par une tige métallique de masse négligeable et de longueur r. La tige est montée sur une barre métallique circulaire qu'est à son tour fixée par l'autre extrémité à un bâti fixe (fig.2.4). La barre métallique est de longueur ***l***, de moment d'inertie $I_0$ et de coefficient de cisaillement $G$. Si le système est déplacé de sa position d'équilibre par un angle donné $\theta$, il en résulte dans la barre un moment de torsion $M_t = \frac{GI_0}{l}\theta$. Alors, la barre agit comme un ressort de torsion avec une raideur de torsion $k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l}$.

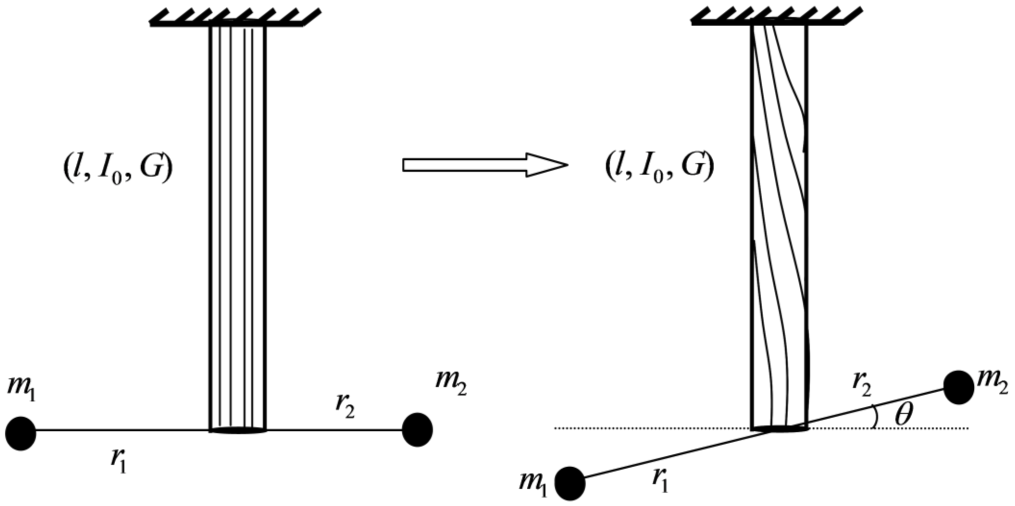



Figure 2. 4 Mouvement vibratoire rotationnel.

Le système a un degré de liberté, la seule coordonnée nécessaire pour l'étudier est l'angle $\theta$. On utilise l'équation de Lagrange pour déduire l'équation différentielle représentant le mouvement,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.29-a}$$

La coordonnée généralisée $q$ dans ce cas est l'angle $\theta$. Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{2.29-b}$$

Où $L = U - T$

- $U = \frac{1}{2} k_t \theta^2$ (2.30)

- $T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2,\qquad v_1=r_1\dot{\theta}\quad et\quad v_2=r_2\dot{\theta}$

$$T=\frac{1}{2}\left(m_1r_1^2+m_2r_2^2\right)\cdot\dot{\theta}^2 \tag{2.31}$$

$$T=\frac{1}{2}I\cdot\dot{\theta}^2 \tag{2.32}$$

où $I=\left(m_1r_1^2+m_2r_2^2\right)$ est le moment d'inertie du système.

> ***Remarque :*** *le moment d'inertie dans un système qui fait un mouvement de rotation est équivalant à la masse dans un système faisant un mouvement de translation.*

A la fin on écrit le Lagrangien du système comme suit :

$$L=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k_t\dot{\theta}^2 \tag{2.33}$$

Appliquant le théorème de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=I\ddot{\theta}$ et $\frac{\partial L}{\partial\theta}=-k_t\theta$ .

Finalement l'équation différentielle qui décrit le mouvement peut s'écrire comme suit :

$$\ddot{\theta}+\frac{k_t}{I}\theta=0 \tag{2.34}$$

$$\ddot{\theta}+w_n\theta=0 \tag{2.35}$$

- $w_n=\sqrt{\frac{k_t}{I}}$ : le battement naturelle du mouvement vibratoire en $rd.s^{-1}$.
- $T=\frac{2\pi}{w_n}$ : la période naturelle du mouvement vibratoire.
- $f_n=\frac{1}{T}$ : la fréquence naturelle du mouvement vibratoire en $s^{-1}$

***Rappel :***

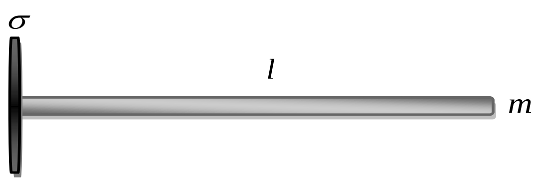
- *Le système précédent est constitué de deux masses distantes (les masses sont éloignées), le moment d'inertie est donné par:* $I = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)$.

- *Si le système est constitué de plusieurs masses distantes (les masses sont éloignées), le moment d'inertie est donné par:* $I = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... m_n r_n^2\right) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$ .

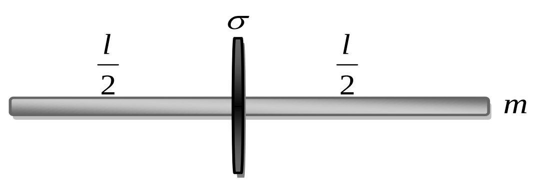
*Si le système est constitué de plusieurs masses adjacentes (distribution continu de la masse), le moment d'inertie est donné par :* $I = \int_\sigma r^2 dm$

$dm$ *est la masse de l'élément qu'est à une distance* $r$ *de l'axe de rotation σ*

*Exemples :*

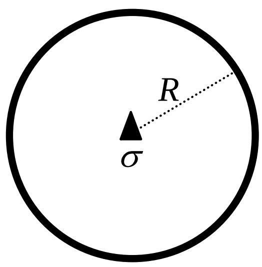



$$I_\sigma = \frac{1}{3} m l^2$$



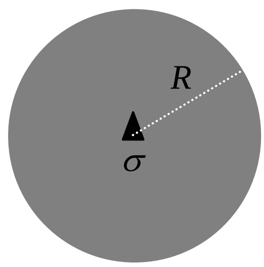

$$I_\sigma = \frac{1}{12} m l^2$$

Anneau



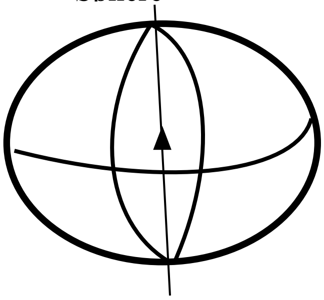

$$I = mR^2$$

Disque



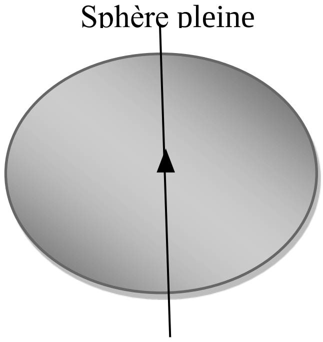

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Sphère



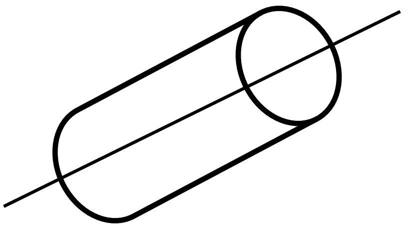
$$I = \frac{2}{3} mR^2$$

Sphère pleine



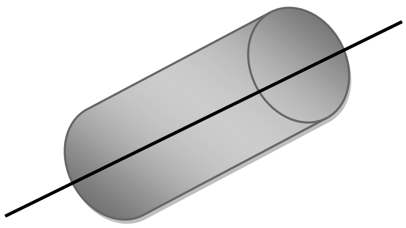
$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Cylindre creux



$$I = mR^2$$

Cylindre plein



$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

***Théorème de Huygens***

*Soit un objet en rotation autour d’un axe $\sigma$ passant par son centre de masse. Si $\Delta$ est un axe parallèle à $\sigma$ distant de $\sigma$ avec une distance $d$ , Le moment d'inertie de l’objet par rapport à l’axe $\Delta$ est donné par ;*

$$I_\Delta = I_\sigma + md^2$$

*$I_\sigma$ est le moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe $\sigma$ et $m$ la masse de l'objet.*

## 2. 3 L'énergie de l'oscillateur harmonique

Pour l'oscillateur harmonique, $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$x = A\sin(w_n t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = Aw_n \cos(w_n t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2 w_n^2 \cos^2(w_n t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(w_n t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}A^2(mw_n^2 + k) = \frac{1}{2}mA^2(w_n^2 + \frac{k}{m})$$

$$E = mA^2 w_n^2 \qquad (2.36)$$

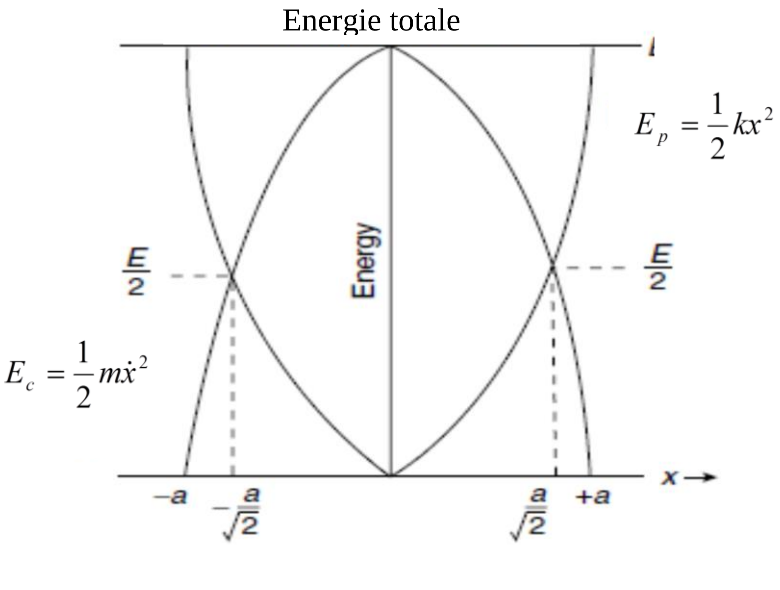



Figure 2.6 : Variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentille dans les vibrations harmonique [5].

## 2. 3 Vibrations libres amorties

Les vibrations libres amorties, sont des vibrations résultantes après une perturbation initiale où l'amplitude diminue avec le temps jusqu'à l'arrêt complet du mouvement. La diminution de l'amplitude est due à la perte de l'énergie à cause des forces de frottement. Il y'a trois types de frottement :

a- **Frottement visqueux** : ce type de frottement, se trouve quand l'objet se meut dans un fluide avec des faibles vitesses. La force de frottement est inversement proportionnelle à la vitesse. $\vec{f} = -c\,\vec{v}$, *où c* est le coefficient de frottement.

b- **Frottement de Colomb** : le frottement de Colomb se trouve lorsqu'un corps solide se glisse contre un autre. La force de frottement est proportionnelle à la force normale à la surface. $\vec{f} = -\alpha\,\vec{N}$

c- **Frottement intermoléculaire** : le frottement intermoléculaire apparu lorsque le système subi des déformations dont lesquelles les molécules s'éloignent et se rapprochent. Au cours de ces interactions intermoléculaires le système perd de l'énergie sous forme de chaleur (énergie irrécupérable) au milieu extérieur.

Dans ce cours on s'intéresse seulement au frottement visqueux. On prend le système masse ressort amortisseur (fig. : 2.7)

- **Méthode de Newton**

D'après la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$, on trouve

$$\vec{f}_f + \vec{f}_k + \vec{p} = m\vec{\gamma} \tag{2.37}$$

$$-c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \tag{2.38}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.39}$$

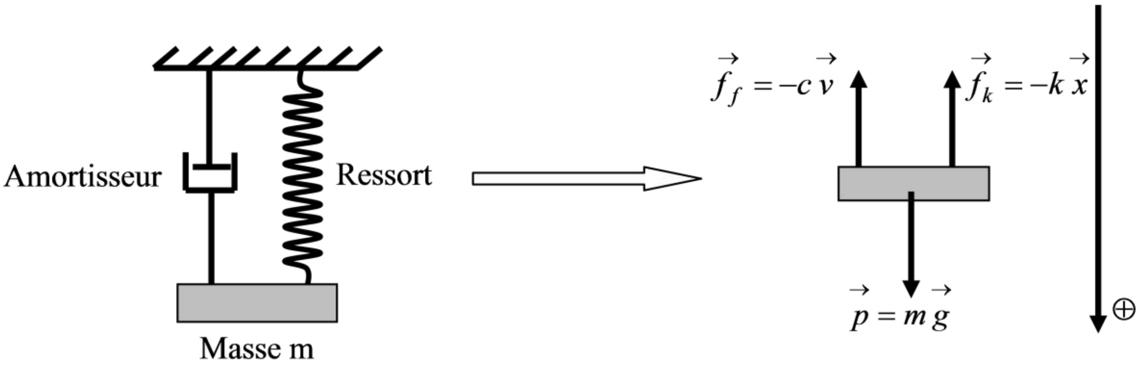



Figure 2.7 : Système amortie, masse ressort amortisseur.

L'équation du mouvement, est une équation différentielle du deuxième ordre.

- **Méthode de Lagrange**

Le système masse ressort amortisseur à un degré de liberté. Il est libre (aucune force extérieure) et non conservatif (amorti). Dans ce cas (voire l'annexe 1), l'équation de Lagrange s'écrit comme suit,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.40}$$

$L$ : Le Lagrangien du système est donné par : $L = T - U$

$q$ : La coordonnée généralisée, dans ce cas $q \equiv x$

$T$ : L'énergie cinétique du système, $T = \frac{1}{2}mv^2$, $comme\; v = \dot{x} \;\; \Rightarrow \;\; T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$U$ : L'énergie potentielle du système, $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.41}$$

- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{x}}\right) = m\ddot{x} \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \tag{2.43}$$

$$D = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 = \frac{1}{2} c\dot{x}^2 \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = c\dot{x} \tag{2.45}$$

Remplaçons les équations (2.39), (2.40) et (2.42) dans (2.37) on aboutit à l'équation différentielle qui représente le mouvement vibratoire,

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.46}$$

C'est la même équation différentielle obtenue par la mécanique de Newton.

Pour résoudre cette équation, if faut écrire l'équation caractéristique (voire l'annexe 2),

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{2.47}$$

Les racines de l'équation sont :

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \, .$$

Les solutions de l'équation caractéristique, bien sur l'équation différentielle, dépend des valeurs et de la nature (réel ou complexe) de $\lambda_1 et \lambda_2$. D'une autre manière, les solutions dépendent de la valeur et du signe de la racine $\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$ .

- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$ il y'a une solution double
- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$ deux solutions réelles

- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$ deux solutions complexes.

Avant d'étudier ces trois cas, nous allons définir le coefficient de frottement critique et le rapport de frottement.

### 2.3.1 Coefficient de frottement critique

Le coefficient de frottement critique $C_c$ est définit comme la valeur du coefficient de frottement pour lequel la racine de l'équation caractéristique sera nulle.

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_c}{2m} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \quad \Rightarrow \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Comme $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

Alors

$$C_c = 2mw_n. \tag{2.48}$$

### 2.3.2 Rapport d'amortissement

Le rapport d'amortissement $\varepsilon$ est défini comme le rapport du coefficient de frottement au coefficient de frottement critique.

$$\varepsilon = \frac{C}{C_c} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{C}{2mw_n} \Rightarrow \frac{C}{2m} = \varepsilon \cdot w_n$$

Les racines de l'équation caractéristique peuvent s'écrire sous la forme,

$$\lambda_1 = -\varepsilon \cdot w_n + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}w_n$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon \cdot w_n - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}w_n .$$

Cette forme d'écriture montre que la nature du mouvement dépend du rapport de frottement $\varepsilon$.

On va trouver la nature du mouvement dans les trois cas possibles.

> ***Remarque** : si le rapport de frottement est nul $\varepsilon_0 = 0 \Rightarrow C = 0$ (il n'y a pas de frottement). Les solutions de l'équation caractéristique sont $\lambda_{1,2} = \pm i w_n$. Le mouvement est harmonique simple.*

### 2.3.3 1ier Cas ; amortissement faible $C < C_c$ :

$$C < C_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon^2 - 1) < 0$$

La valeur de la racine est négative, donc les solutions de l'équation caractéristique sont complexes. On peut réécrire les solutions de l'équation caractéristique sous la forme ;

$$\lambda_1 = -\varepsilon \cdot w_n + i\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon \cdot w_n - i\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n .$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont de la forme $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est donnée par (voire l'annexe 2),

$$x(t) = e^{\alpha.t}(A_1 \cos(\beta.t) + A_2 \sin(\beta.t)) \tag{2.49}$$

où, $\alpha = -\varepsilon w_n$ et $\beta = \sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n$. Par remplacement, on trouve

$$x(t) = e^{-\varepsilon w_n.t}(A_1 \cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t) + A_2 \sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t)) \tag{2.50}$$

$A_1$ *et* $A_2$ sont des constantes peuvent être trouver à partir des condition initiales.

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = -\varepsilon w_n e^{-\varepsilon w_n t}(A_1 \cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t) + A_2 \sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t)) +$$

$$e^{-\varepsilon w_n t}(-A_1\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.\sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t) + A_2\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.\cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n.t))$$

On déduit :

$$A_1 = x_0\,, \quad A_2 = \frac{\dot{x} + \varepsilon w_n x_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_n}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon w_n.t}\left(x_0 \cos(\sqrt{(1-\varepsilon^2)} w_n.t) + \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon w_n x_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_n} \sin(\sqrt{(1-\varepsilon^2)} w_n.t)\right) \qquad (2.51)$$

Comme nous avons dit auparavant, l'équation peut être écrite sous la forme la plus adéquate

$$x(t) = Ae^{-\varepsilon w_n t} \sin(w_a t + \varphi_0) \qquad (2.52)$$

Où $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ *et* $\quad w_a = \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_n$.

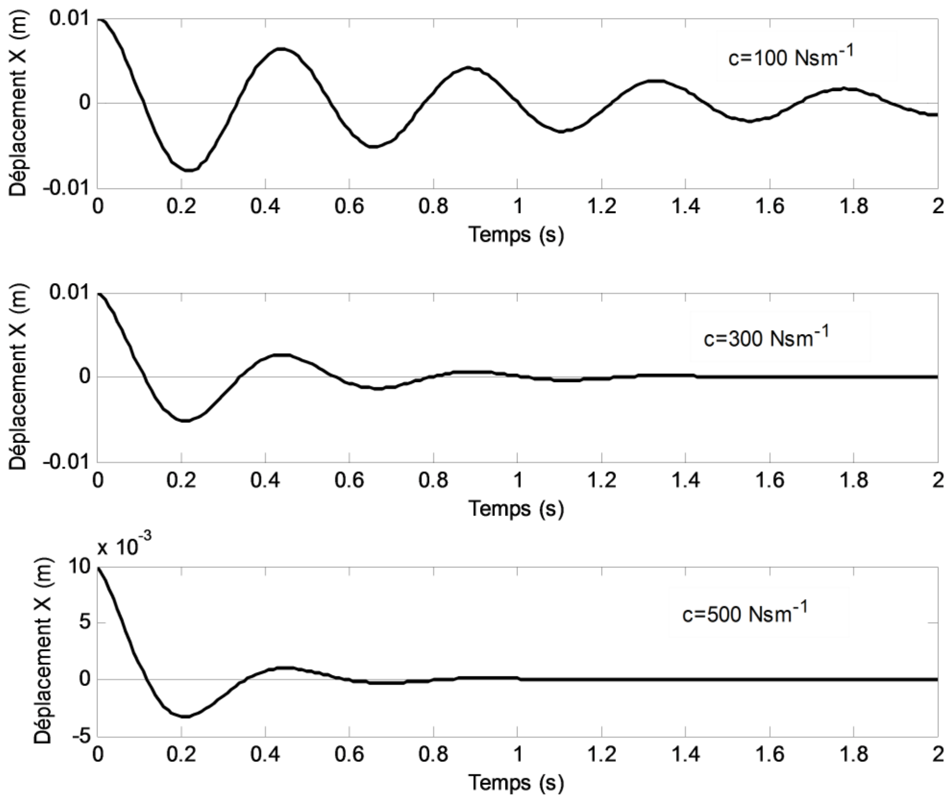



Figure 2.8 **:** Vibration faiblement amortie d'un système masse ressort (m=500 kg, k=$10^4$N$m^{-1}$), pour trois différentes valeurs de coefficient de frottement.

$w_a$ : le battement amortie, il est toujours inferieur à $w_n$.

L'amplitude du mouvement $Ae^{-\varepsilon w_n t}$ diminue avec le temps jusqu'à l'arrêt du système.

### 2.3.4 2$^{ème}$ cas : frottement critique :

$$C = C_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(1-\varepsilon^2\right)} = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique seront données par: $\lambda_{1,2} = -w_n$. La racine est réelle doublée, et par suite la solution de l'équation différentielle est donnée par (voir l'annexe 2):

$$x(t) = \left(A_1 + A_2 t\right)e^{-w_n t} \tag{2.53}$$

Des conditions initiales, $t = 0\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \dot{x}_0 + w_n x_0 \end{cases}$

$$x(t) = \left(x_0 + (\dot{x}_0 + w_n x_0)t\right)e^{-w_n t} \tag{2.54}$$

Le mouvement n'est pas vibratoire, le système va revenir à sa position initiale sans faire des oscillations (fig. 2.8).

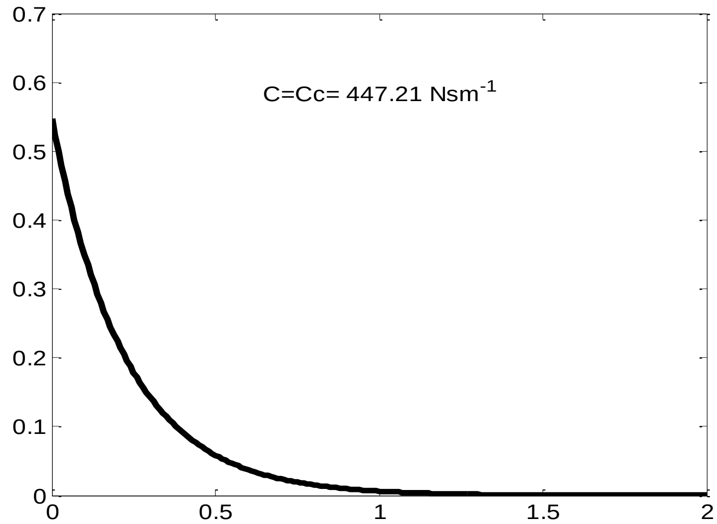



Figure 2.9 **:** Vibration critique amortie d'un système masse ressort (m=50 kg, k=$10^4$Nm$^{-1}$.

### 2.3.5 3ème cas ; frottement lourd :

$C > C_c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \sqrt{\varepsilon^2 - 1} > 0$, Les racines de l'équation caractéristique seront données par : $\lambda_{1,2} = -w_n$. Les racines sont réelles,

$$\lambda_1 = -\varepsilon w_n + \sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon w_n - \sqrt{(1-\varepsilon^2)}w_n .$$

Par suite, la solution de l'équation différentielle est donnée par (voir l'annexe 2):

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1} + A_2 e^{\lambda_2} \tag{2.55}$$

Le mouvement n'est pas vibratoire. Le système va retrouver son état initial sans oscillations dans un temps plus grand que dans le cas de frottement critique.

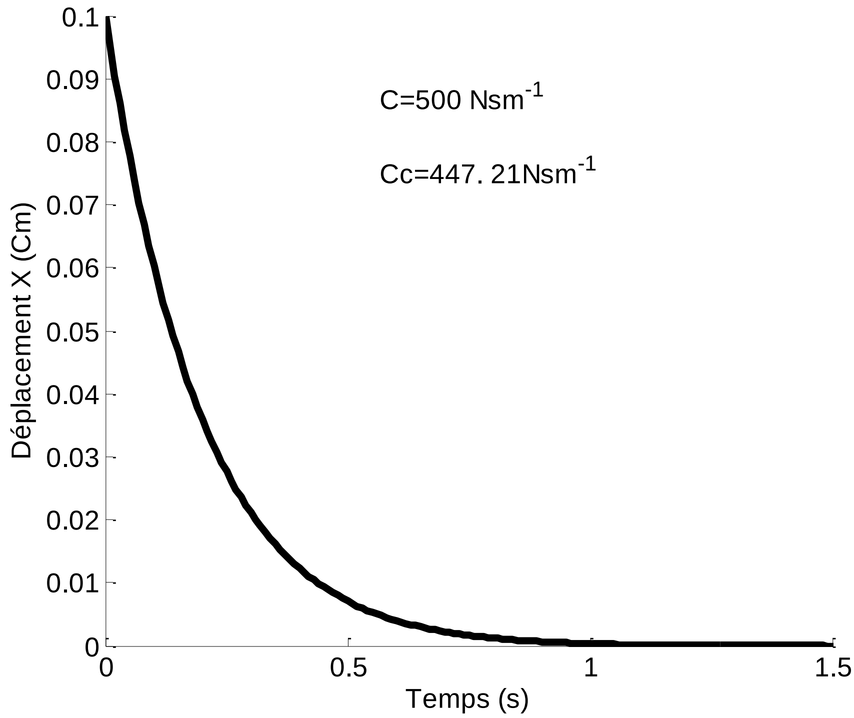



Figure 2.10 **:** Vibration lourdement amortie d'un système masse ressort (m=50 kg, k=$10^4$Nm$^{-1}$.

### 2.3.6 Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique est défini comme le taux de diminution de l'amplitude du mouvement vibratoire. Mathématiquement, le décrément logarithmique est donné par le logarithme naturel de deux amplitudes successives.

Soit $t_1$ *et* $t_2$ les temps de deux amplitudes maximales successives.

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Ae^{-\varepsilon w_n t_1}\sin(w_a t_1 + \varphi_0)}{Ae^{-\varepsilon w_n t_2}\sin(w_a t_2 + \varphi_0)} \tag{2.56}$$

$t_2 = t_1 + T_a$ ,

$T_a = \dfrac{2\pi}{w_a}$ : la période du mouvement amorti.

$$\sin(w_d t_2 + \varphi_0) = \sin(w_d t_1 + 2\pi + \varphi_0) = \sin(w_d t_1 + \varphi_0)$$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{e^{-\varepsilon w_n t_1}}{e^{-\varepsilon w_n t_2}} = \frac{e^{-\varepsilon w_n t_1}}{e^{-\varepsilon w_n (t_1 + t_a)}} = e^{\varepsilon w_n T_a} \tag{2.57}$$

Et par suite le décrément logarithmique est donné par ;

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \varepsilon w_n T_a \tag{2.58}$$

On remplace par la formule de $T_a$ , le décrément logarithmique peut être écrite sou la forme

$$\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{2.59}$$.

*Remarque : On peut écrire le taux $\varepsilon$ d'amortissement en fonction du décrément logarithmique $\delta$ comme,*

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

*Cette relation permet de trouver expérimentalement le coefficient de frottement par la mesure de décrément logarithmique.*

Le décrément logarithmique de deux amplitudes séparées par le temps $t_2 = t_1 + nT_a$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_3}.\frac{x_3}{x_4}..............\frac{x_n}{x_{n+1}} \qquad (2.60)$$

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\varepsilon w_n T_a}$$

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = e^{n\varepsilon w_n T_a}$$

Le décrément logarithmique sera donné :

$$\delta = n\frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad (2.61).$$

### 2.3.7 L'énergie dissipée lors du frottement faible

L'énergie dissipée lors du frottement est égale au travail fourni par la force de frottement (dans notre cas ; la force de frottement est de nature visqueuse).

Lors d'un cycle, l'énergie dissipée est égale au travail fourni par la force de frottement pendent ce cycle. La force de frottement visqueux est de la forme $\vec{f} = -c\vec{v}$ .

Par définition le travail de la force $\vec{f}$ est donnée par ;

$$w = \int_0^{T_a} \vec{f}\, d\vec{x} \quad \Rightarrow \quad w = -c\int_0^{T_a} \vec{v}\, d\vec{x} \quad \Rightarrow \quad w = -c\int_0^{T_a} v dx.$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = vdt, \qquad v = \dot{x}$$

$$w = -c\int_0^{T_a} \dot{x}\dot{x}dt \quad \Rightarrow \quad w = -c\int_0^{T_a} \dot{x}^2 dt\ .$$

$$\Delta E = c\int_0^{T_a} \dot{x}^2 dt$$

Nous avons,

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(w_a t + \varphi_0)$$

$$\alpha = \frac{c}{2m}\,,\ w_a = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,w_n$$

$$\dot{x} = -\alpha A e^{-\alpha t}\sin(w_a t + \varphi) + A w_a A e^{-\alpha t}\cos(w_a t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\alpha t}(\alpha \sin(w_a t + \varphi) - w_a A\cos(w_a t + \varphi))$$

Dans le cas d'amortissement faible, le facteur $e^{-2\alpha t} \approx 1$ dans l'intervalle $0 \to T_a$

$$\Delta E = cA^2 \int_0^{T_a} (\alpha^2 \sin^2(w_a t + \varphi_0) + w_a^2 \sin^2(w_a t + \varphi_0) - 2\alpha w_a \sin(w_a t + \varphi_0)\sin(w_a t + \varphi_0))dt$$

On fait un changement de variable

$$\theta = w_a t + \varphi \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = w_a \quad \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{w_a} \quad \begin{cases} t : 0 \to T_a \\ \theta : 0 \to 2\pi \end{cases}$$

On a Aussi, $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi,\quad \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = 0$

A la fin, l'énergie dissipée lors d'un cycle sera donnée par :

$$\Delta E = \frac{cA^2}{w_a}(\alpha^2\pi + w_a^2\pi) = \frac{cA^2}{w_a} w_n^2$$

$$\Delta E = \frac{cA^2\pi}{w_a} w_n^2 = m\alpha A^2 T_a w_n^2 \tag{2.62}$$

### 2.3.8 Facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$

Où $E$ est l'énergie emmagasinée dans l'oscillateur (c'est l'énergie de l'oscillateur harmonique) et $\Delta E$ est l'énergie dissipée lors d'un cycle.

$$E = mA^2 w_n^2$$

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{mA^2 w_n^2}{mA^2 \alpha T_a w_n^2}$$

$$Q = \frac{2mw_a}{c} \tag{2.63}$$

En physique des vibrations, le facteur de qualité Q est un paramètre sans dimension qui décrit comment un oscillateur est sous-amorti. Un facteur de qualité plus élevé, indique un taux de perte d'énergie plus faible par rapport à l'énergie stockée dans l'oscillateur (les oscillations s'arrêtent plus lentement). par exemple, un pendule oscillant dans l'air a un facteur de qualité élevé, alors qu'un pendule immergé dans l'huile a un facteur de qualité faible.