Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie spectrale des opérateurs
2019/2020

Corrigé type de l'examen final (S2)

Exercice N^{0}1: (06 *pts*)

1- Montrer que si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert **H** alors on a
(**02**)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

2- Montrer que si **H** un espace de *Hilbert* réel alors
(04)

$$(x \ / \ y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],$$

où $(. \ / \ .)$ désigne le produit scalaire de **H** et $\|.\|$ est la norme induite du produit scalaire.

Solution:
1-Montrons que si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert **H** alors on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

En effet, on sait que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x \ +y \ / \ x+y) && \mathbf{(0{,}5)} \\ &= (x \ / \ x) + (x \ / \ y) + (y \ / \ x) + (y \ / \ y) && \mathbf{(0{,}5)} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x \ / \ y) + (y \ / \ x). && \mathbf{(0{,}5)} \end{aligned}$$

Puisque x et y sont deux vecteurs orthogonaux i.e $(x \ / \ y) = (y \ / \ x) = 0$ et donc **(0,5)**

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

2-Montrons que si **H** un espace de *Hilbert* réel alors

$$(x \ / \ y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],$$

où $(. \ / \ .)$ désigne le produit scalaire de **H** et $\|.\|$ est la norme induite du produit scalaire.
En effet, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x \ +y \ / \ x+y) \ , && \mathbf{(0{,}5)} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x \ / \ y) + (y \ / \ x) \ , && \mathbf{(0{,}5)} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \ / \ y) \ ; && \mathbf{(0{,}5)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= (x \; - y \;/\; x - y) \;, \qquad \textbf{(0,5)} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x \;/\; y) - (y \;/\; x) \;, \qquad \textbf{(0,5)} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x \;/\; y). \qquad \textbf{(0,5)} \end{aligned}$$

Alors

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}(x \;/\; y) \;, \qquad \textbf{(0,5)}$$

et puisque **H** est réel donc $\mathrm{Re}(x \;/\; y) = (x \;/\; y)$, d'où

(0,5)

$$\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] = (x \;/\; y).$$

<u>Exercice N^{0}2</u>: (06 *pts*)

1- Soit **H** un espace de Hilbert complexe et soit $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ un opérateur auto-adjoint. Montrer que **(02)**

$$(\mathbf{A}x \;/\; x) \in \mathbb{R} \;, \; \forall x \in \mathbf{H}.$$

2- Soit **H** un espace de Hilbert complexe et soit $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ un opérateur auto-adjoint, on dit que **A** est positif et on écrit $\mathbf{A} \geq 0$, si $(\mathbf{A}x \;/\; x) \geq 0 \;, \; \forall x \in \mathbf{H}$. Si **A** et $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ sont deux opérateurs auto-adjoints, on dit que $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$.

Montrer que si **A, B** et $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ sont trois opérateurs auto-adjoints alors :

a) si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \geq \mathbf{C}$ alors $\mathbf{A} \geq \mathbf{C}$; **(1,5)**

b) si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$; **(1,5)**

c) si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ alors $\alpha\mathbf{A} \geq \alpha\mathbf{B}$ pour $\alpha \geq 0$ **(0,5)** , et $\alpha\mathbf{A} \leq \alpha\mathbf{B}$ pour $\alpha \leq 0$. **(0,5)**

<u>Solution</u>:

1- Pour $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ un opérateur auto-adjoint, montrons que

$$(\mathbf{A}x \;/\; x) \in \mathbb{R} \;, \; \forall x \in \mathbf{H}.$$

En effet, puisque l'opérateur **A** est auto-adjoint, i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ($\mathbf{A}^*$ est l'adjoint de **A**), alors

$$(\mathbf{A}x \;/\; y) = (x \;/\; \mathbf{A}y) \;, \; \forall x, \; y \in \mathbf{H} \;, \qquad \textbf{(0,5)}$$

en particulier

$$(\mathbf{A}x \;/\; x) = (x \;/\; \mathbf{A}x) \;, \; \forall x \in \mathbf{H}. \qquad \textbf{(0,5)}$$

Puisque le produit scalaire est hermitien, i.e $(x \;/\; y) = \overline{(y \;/\; x)}$, alors **(0,5)**

$$(\mathbf{A}x \;/\; x) = \overline{(\mathbf{A}x \;/\; x)} \;, \; \forall x \in \mathbf{H}, \qquad \textbf{(0,5)}$$

et donc $(\mathbf{A}x \;/\; x) \in \mathbb{R} \;, \; \forall x \in \mathbf{H}$.

2- Pour $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ trois opérateurs auto-adjoints montrons que

$a)$ si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \geq \mathbf{C}$ alors $\mathbf{A} \geq \mathbf{C}$.

En effet si

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \quad \text{alors} \quad (\mathbf{A}x \;/\; x) \geq (\mathbf{B}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H} \;; \quad \mathbf{(0,5)}$$

et de même si

$$\mathbf{B} \geq \mathbf{C} \quad \text{alors} \quad (\mathbf{B}x \;/\; x) \geq (\mathbf{C}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H}. \;\; \mathbf{(05)}$$

Par conséquent on aura $(\mathbf{A}x \;/\; x) \geq (\mathbf{C}x \;/\; x)$ $\forall x \in \mathbf{H}$, i.e $\mathbf{A} \geq \mathbf{C}$. **(0,5)**

$b)$ si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

En effet si

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \quad \text{alors} \quad (\mathbf{A}x \;/\; x) \geq (\mathbf{B}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H} \;; \quad \mathbf{(0,25)}$$

de même

$$\mathbf{B} \geq \mathbf{A} \quad \text{alors} \quad (\mathbf{B}x \;/\; x) \geq (\mathbf{A}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H}. \;\; \mathbf{(0,25)}$$

Par conséquent on aura $(\mathbf{A}x \;/\; x) = (\mathbf{B}x \;/\; x)$ $\forall x \in \mathbf{H}$, i.e $((\mathbf{A} - \mathbf{B})\, x \;/\; x) = \mathbf{0}$ $\forall x \in \mathbf{H}$ **(0,5)** et puisque $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux opérateurs auto-adjoints alors $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ l'est aussi et donc $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ i.e $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. **(0,5)**

$c)$ si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ alors $\alpha\mathbf{A} \geq \alpha\mathbf{B}$ pour $\alpha \geq 0$, et $\alpha\mathbf{A} \leq \alpha\mathbf{B}$ pour $\alpha \leq 0$.

En effet si

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \quad \text{alors} \quad (\mathbf{A}x \;/\; x) \geq (\mathbf{B}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H} \;; \quad \mathbf{(0,25)}$$

alors si $\alpha \geq 0$ on a

$$\alpha(\mathbf{A}x \;/\; x) = (\alpha\mathbf{A}x \;/\; x) \geq \alpha(\mathbf{B}x \;/\; x) = (\alpha\mathbf{B}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H} \;; \quad \mathbf{(0,25)}$$

et donc $\alpha\mathbf{A} \geq \alpha\mathbf{B}$.
De même si

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \quad \text{alors} \quad (\mathbf{A}x \;/\; x) \geq (\mathbf{B}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H} \;; \quad \mathbf{(0,25)}$$

et si $\alpha \leq 0$ on a

$$\alpha(\mathbf{A}x \;/\; x) = (\alpha\mathbf{A}x \;/\; x) \leq \alpha(\mathbf{B}x \;/\; x) = (\alpha\mathbf{B}x \;/\; x) \;\; \forall x \in \mathbf{H} \;; \quad \mathbf{(0,25)}$$

i.e. $\alpha\mathbf{A} \leq \alpha\mathbf{B}$.

<u>**Exercice N^{0}3**:</u> (08 *pts*)

1- Soit $\mathbf{X}$ un espace de Banach et soit $\mathbf{A}$ un opérateur linéaire borné défini de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{X}$, i.e. $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$. Montrer que si $\|I - \mathbf{A}\| < 1$ alors $\mathbf{A}$ est continûment inversible et que
(2,5)

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - \mathbf{A}\|}. \qquad \mathbf{(1,5)}$$

2- Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux espaces de Banach et soit $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Montrer que si $\mathbf{A}$ est un opérateur continûment inversible, alors $\mathbf{A}^*$ (l'adjoint de $\mathbf{A}$) est continûment inversible et que
(03)

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* \;\; . \quad \mathbf{(01)}$$

<u>**Solution**</u>:

1- Soit $\mathbf{A}$ un opérateur linéaire borné défini d'un espace de Banach $\mathbf{X}$ dans lui même , i.e. $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$. Montrons que si $\|I - \mathbf{A}\| < 1$ alors $\mathbf{A}$ est continûment inversible.

Montrons d'abord que la série $\sum_{k=0}^{\infty} (I - \mathbf{A})^k$ est absolument convergente. En effet puisque

$$\left\|(I - \mathbf{A})^k\right\| \leq \|I - \mathbf{A}\|^k \ , \ \forall k \geq 0. \qquad \mathbf{(0{,}5)}$$

On sait aussi que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \|I - \mathbf{A}\|^k = \dfrac{1}{1 - \|I - \mathbf{A}\|}$ est convergente car $\|I - \mathbf{A}\| < 1$ **(0,5)** et par conséquent la la série $\sum_{k=0}^{\infty} (I - \mathbf{A})^k$ est absolument convergente, c'est-à-dire elle est convergente.

Notons par S sa somme, i.e. $S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - \mathbf{A})^k$, et par $S_n = \sum_{k=0}^{n} (I - \mathbf{A})^k$ sa somme partielle d'ordre n.Donc on a

$$\mathbf{A}S_n = (I - (I - \mathbf{A}))S_n = I - (I - \mathbf{A})^{n+1}; \quad \mathbf{(0{,}25)}$$

et

$$S_n\mathbf{A} = S_n(I - (I - \mathbf{A})) = I - (I - \mathbf{A})^{n+1}. \quad \mathbf{(0{,}25)}$$

Par passage à la limite on déduit que

$$\mathbf{A}S = S\mathbf{A} = I \ , \mathbf{(0{,}25)}$$

car $\lim_{n \to \infty} (I - \mathbf{A})^{n+1} = 0$ **(0,25)** comme limite du terme général d'une série convergente. Donc $\mathbf{A}$ admet un inverse à gauche et un inverse à droite qui est S et alors $\mathbf{A}$ est continûment inversible **(0,25)** et $\mathbf{A}^{-1} = S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - \mathbf{A})^k$. **(0,25)**

Montrons maintenant que

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|I - \mathbf{A}\|}.$$

En effet puisque $\mathbf{A}^{-1} = S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - \mathbf{A})^k$ donc
(0,25)

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} (I - \mathbf{A})^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|I - \mathbf{A}\|^k \qquad \mathbf{(0{,}5)}$$

et par passage à la limite pour $n \to \infty$ on trouve

$$\mathbf{(0{,}25)} \quad \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} (I - \mathbf{A})^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|I - \mathbf{A}\|^k = \frac{1}{1 - \|I - \mathbf{A}\|}. \quad \mathbf{(0{,}5)}$$

2- Pour $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux espaces de Banach et $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$. Montrons que si $\mathbf{A}$ est un opérateur continûment inversible, alors $\mathbf{A}^*$ (l'adjoint de $\mathbf{A}$) est continûment inversible et que $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$.

On sait que si $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ alors $\mathbf{A}^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*,\ \mathbf{X}^*)$ **(0,25)** où $\mathbf{X}^*$ et $\mathbf{Y}^*$ sont respectivement les espaces duaux de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, et que

$$\langle \mathbf{A}^* f \ \mid x\rangle = \langle f \ \mid \mathbf{A}x\rangle \ , \ \forall x \in \mathbf{X} \text{ et } \forall f \in \mathbf{Y}^*. \ \ \mathbf{(0{,}5)}$$

Puisque $\mathbf{A}$ est un opérateur continûment inversible alors $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y},\ \mathbf{X})$ et que **(0,25)**

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = Id_{\mathbf{Y}} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = Id_{\mathbf{X}}\ . \qquad \mathbf{(0{,}5)}$$

alors

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^* = (Id_{\mathbf{Y}})^* \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)^* = (Id_{\mathbf{X}})^*, \qquad \mathbf{(0{,}5)}$$

c'est-à-dire

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* \mathbf{A}^* = Id_{\mathbf{Y}^*} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^* \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* = Id_{\mathbf{X}^*}\ , \quad \mathbf{(0{,}5)}$$

car $(Id_{\mathbf{Y}})^* = Id_{\mathbf{Y}^*}$ et $(Id_{\mathbf{X}})^* = Id_{\mathbf{X}^*}$. **(0,5)** Donc $\mathbf{A}^*$, l'adjoint de $\mathbf{A}$, admet un inverse à gauche et un inverse à droite, qui est $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* \in \mathcal{L}(\ \mathbf{X}^*,\ \mathbf{Y}^*)$, **(0,5)** i.e. $\mathbf{A}^*$ est aussi continûment inversible et que $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$.**(0,5)**